УЏБЕНИК

МАТЕМАТИКА 9 РАЗРЕД

ПРЕМА ПРОГРАМУ ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА 9. РАЗРЕД
ДЕВЕТОГОДИШЊЕГ ОСНОВНОГ ОБРАЗОВАЊА

Сју Пембертон, Патрик Кивлин и Пол Винтерс

lamina

5 издање, 2024

Essential Mathematics for Cambridge Secondary 1 Stage 9 Pupil Book
Text © Sue Pemberton, Patrick Kivlin, and Paul Winters 2014
Illustrations © Oxford University Press 2014
This book was originally published in English in 2014.
This translation is published by arrangement with Oxford University Press.

Математика 9 уџбеник
Текст © Сју Пембертон, Патрик Кивлин и Пол Винтерс 2014
Оригиналне илустрације © Оксфорд Јуниверзити прес, 2014
Књига је први пут објављена на енглеском језику 2014. године.
Овај превод је издат у договору са „Оксфорд Јуниверзити Прес".

Аутори
Сју Пембертон, Патрик Кивлин и Пол Винтерс
(Sue Pemberton, Patrick Kivlin and Paul Winters)

Српско адаптирано издање
Арс Ламина – публикације, Скопље 2024
Ауторска права © 2024 Арс Ламина – публикације

Главни уредник
Бранка Вугариска

Уредник
Билјана Стојоска Златков

Превод са енглеског језика
Снежана Ивановиќ Христовска

Језичка редакција
Јелена Иванишевиќ
Анета Пауновска

Стручна редакција
Др Анета Гацовска-Барандоска, доцент на Институту за математику
Природно-математички факултет, Универзитет "Свети Кирил и Методиј" Скопље
Др Весна Димитриевска Ристовска, доцент на ФИНКИ
Универзитет "Свети Кирил и Методиј" Скопље
Мр Методија Јанчески, асистент на ФИНКИ
Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопље
Весна Бојаџиева, професор математике
ОШ „Кочо Рацин" – Скопље

Техничко уређивање
Арс Ламина

Дизајн корица
Дарко Фиданоски

Штампа
Арс Ламина, Скопје 2024

Тираж
8

Сва права су задржана. Ниједан део ове књиге не сме да буде прештампан или пренесен у било какву форму, или било каквим средствима, електронски или механички, укључујући фотокопирање и документовање, или да буде сачувану систему за поновно проналажење без писмене сагласности издавача.

Овај уџбеник је одобрен за употребу у деветоразредном основном образовању, Решењем за продуживање важности решења за употребу уџбеника по предмету математика за 9 разред бр. 08-9084/1 од 25.07.2018, изданог од Министарства за образовање и науку Р. Македоније.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(075.2)=163.41

ПЕМБЕРТОН, Сју
Математика : 9 разред : према програму из математике за 9. разред деветогодишњег основног образовања : уџбеник / Сју Пембертон, Патрик Кивлин и Пол Винтерс ; [превод са енглеског језика Снежана Ивановиќ Христовска]. - 5. изд. - Скопље : Арс ламина - публикације, 2024. - IV, 307 стр. : илустр. ; 27 см

Превод на делото: Essential mathematics for Cambridge secondary 1 stage 9 : pupil book / text Sue Pemberton, Patrick Kivlin and Paul Winters. - Речник: стр. 305-307

ISBN 978-608-280-026-4

1. Кивлин, Патрик [автор] 2. Винтерс, Пол [автор]

COBISS.MK-ID 64136453

Садржај

1 Број и решавање проблема 1
- 1.1 Децимална места 2
- 1.2 Степени 5
- 1.3 Целобројни степени на броја 10 11
- 1.4 Множење и дељење децималним бројевима 13
- 1.5 Сабирање и одузимање разломака 16
- 1.6 Множење разломака 20
- 1.7 Дељење разломака 23
- 1.8 Позитивни и негативни бројеви 24
- Задаци за понављање 28

2 Алгебра и решавање проблема 30
- 2.1 Упрошћавање степена 31
- 2.2 Правила за операције са степенима са истим основама 32
- 2.3 Растављање на чиниоце 34
- 2.4 Сабирање и одузимање алгебарских разломака 36
- 2.5 Решавање линеарних једначина 38
- 2.6 Састављање алгебарских израза 40
- 2.7 Инверзна функција 42
- 2.8 Правило за одређивање следећег члана у низу 45
- 2.9 Правило и одређивање *n*-тог члана у низу. 49
- 2.10 *n*-ти члан аритметичког низа 52
- Задаци за понављање 55

3 Геометрија и решавање проблема 58
- 3.1 Три димензије 58
- 3.2 Осна симетрија у три димензије 64
- 3.3 Тесалација 66
- 3.4 Описивање трансформација 70
- 3.5 Хомотетија и сличност 75
- Задаци за понављање 80

4 Мерење и решавање проблема 84
- 4.1 Претварање мерних јединица 84
- 4.2 Површина 87
- 4.3 Круг 91
- Задаци за понављање 95

5 Рад са подацима и решавање проблема 98
- 5.1 Планирање истраживања 98
- 5.2 Инструмент за прикупљање података 102
- 5.3 Стабло-лист дијаграми 107
- 5.4 Статистике за веће групе података 111
- 5.5 Упоређивање расподела 117
- Задаци за понављање 122

6 Број и решавање проблема 126
- 6.1 Квадратни и кубни корени 127
- 6.2 Редослед операција 130
- 6.3 Повећавање и смањивање процената 132
- 6.4 Упоређивање размера 138
- 6.5 Пропорционалност 144
- Задаци за понављање 150

7 Алгебра и решавање проблема 154
- 7.1 Извођење формула и замена бројева у формулама 155
- 7.2 Изражавање променљиве 159
- 7.3 Коефицијент правца графика функције 166
- 7.4 График линеарне функције 167
- 7.5 Функције које произилазе из ситуација у реалном животу 170
- 7.6 Директна пропорција 172
- 7.7 Графичко решавање система једначина 174
- 7.8 Решавање система једначина методом елиминације 175
- 7.9 Множење два алгебарска израза 180
- 7.10 Покушаји и грешке 183
- 7.11 Неједначине 185
- Задаци за понављање 190

8 Геометрија и решавање проблема 192
- 8.1 Конструкција правих 193
- 8.2 Конструкција правилних многоуглова 197
- 8.3 Геометријско место тачака 200
- 8.4 Углови многоугла 203
- 8.5 Правилне тесалације 214
- 8.6 Мапе и азимут 217
- 8.7 Питагорина теорема 222
- 8.8 Примена Питагорине теореме 226
- Задаци за понављање 230

9 Мерење и решавање проблема 236
- 9.1 Средња брзина 236
- 9.2 Изведене мерне јединице 240
- 9.3 Запремина 246
- 9.4 Призма и ваљак 249
- Задаци за понављање 254

10 Рад са подацима и решавање проблема 257
- 10.1 Дијаграми са тачкама и корелација 257
- 10.2 Експериментална вероватноћа 263
- 10.3 Исходи који се узајамно искључују 268
- 10.4 Табела исхода 271
- Задаци за понављање 275

Задаци за самопроверу за теме 1 и 6 277
Задаци за самопроверу за теме 2 и 7 284
Задаци за самопроверу за теме 3 и 8 288
Задаци за самопроверу за теме 4 и 9 295
Задаци за самопроверу за теме 5 и 10 300

Речник 305

Увод

Овај уџбеник је прилагођен према националном наставном програму из математике, којег је издало Биро за развој образовања Р. Македоније и који је одобрен од Министарства за образовање и науку Р. Македоније.

Уџбеник се користи на једноставан и флексибилан начин зато што у потпуности прати редослед наставних циљева програма у првом и другом полугођу, подстичући ученике да се активно укључе у садржине како би развили истраживачке вештине паралелно са тематским знањем.

Следеће секције и ознаке су креиране за лакше праћење садржаја у уџбенику:

Наставни циљеви

Наставни циљеви су усаглашени са наставним програмом за овај разред и преко њих се описују подручја која се изучавају као и очекивани резултати у свакој теми.

Примери

У свакој теми дати су решени примери са циљем да се илуструју и прошире садржаји који се обрађују у тој наставној целини. Требало би да ученици самостално решавају ове примере, а затим да своје одговоре упореде са добијеним решењима.

Менталне стратегије, технике и вештине у решавању математичких проблема заступљене су кроз садржај целе књиге.

Задаци за практичну примену: Овим задацима се развијају знање и вештине на тај начин што ће подстицати ученике да размишљају креативно или да развију методичан приступ често радећи задатке из свакодневних ситуација.

Задаци за проширивање знања: Ови задаци представљају допунски изазов у односу на уобичајене задатке у овом уџбенику. У њима се тражи да се примене и прошире научене садржине из сваке лекције.

У оквиру су дата корисна упутства и савети које је потребно упамтити ради лакшег решавања математичких проблема.

Кључне речи: Када се кључна реч први пут појави у уџбенику, она ће бити наглашена задебљаним **црвеним словима**. Дефиниције за све кључне речи се могу наћи у речнику на крају уџбеника.

За увежбавање вештина и примену знања, како за домаћи, тако и за школски рад, издавач „Арс Ламина – публикации" преко стране obrazovanie.literatura.mk додатно обезбеђује бесплатан приступ многим онлајн ресурсима за наставнике и идеје за реализацију у настави, као и материјале и савете за родитеље (за рад са децом и идеје за пројекте изван учионице). Сви ови ресурси пружају велику подршку у имплементацији наставног програма из овог предмета.

1 Број и решавање проблема

Наставни циљеви

- Заокругљивање бројева до одређеног броја децималних места; заокругљивање се користи да би се дошло до решења проблема уз одређени степен тачности.
- Коришћење степена са изложиоцем: нула, позитиван и негативан цели број и закони множења и дељења степена чији су изложиоци позитивни цели бројеви.
- Сабирање, одузимање, множење и дељење целих бројева.
- Препознавање еквивалентности од 0,1; $\frac{1}{10}$ и 10^{-1}; множење и дељење целих бројева или децималних бројева са степеном са основом 10 и степеновим изложиоцем било којег позитивног или негативног броја.
- Препознавање резултата при множењу и дељењу бројева између 0 и 1.
- Утврђивање коришћења правила аритметичких и инверзних операција за упрошћавање израчунавања.
- Проширивање знања менталних метода за израчунавање, радећи са децималним бројевима, разломцима, процентима и множиоцима уз коришћење бележака.
- Множење децималним бројевима, разумевање где ставити децимални зарез уз коришћење еквивалентних израчунавања; дељење децималним бројевима путем трансформисања у дељењу целим бројевима.
- Утврђивање знања о записивању разломака у нескратив облик скраћивањем заједничких делилаца.
- Сабирање, одузимање, множење и дељење разломака: тумачење дељења као инверзне операције множења и скраћивање заједничким делиоцем пре множења или дељења разломака.

Ручно рачунање



Пре откривања калкулатора, многе рачунице су биле рађене ручно.

Било је у употреби неколико рачунских алатки.

Једна од њих је лењир са клизачем.



Лењир са клизачем шибер се користио за множење са прелазом и за дељење путем сабирања.

Израчунавања су се вршила помоћу степена и експонента.

1.1 Децимална места

Децимална места можемо да заокруглимо на датом броју **децималног места (децимале).**

Заокругљивање на једно децимално место (1 децимала) значи да постоји 1 цифра после децималног зареза.

Заокругљивање на два децимална места (2 децимале) значи да постоје 2 цифре после децималног зареза.

Децималне бројеве можемо да заокруглимо на 3 децимале, на 4 децимале итд.

Када заокругљујемо на једну децималу, треба да размотримо другу децималу.

Ако је друга децимала 5 или је већа од 5, онда прву децималу треба да увећамо за 1, односно заокругљујемо „вишком". Ако је друга децимала мања од 5, онда прва децимала остаје иста, односно заокругљујемо „мањком".

Ако заокругљујемо на 2 децимале, тада треба да размотримо трећу децималу.
Уместо „децималних места" „децимално место" надаље ћемо писати „д. м.".

Пример 1

Заокругли бројеве на задати број децималних места.

а) 23,956 на 1 д.м.

б) 4,9762 на 2 д.м.

в) 23,5804 на 3 д.м.

г) 8,0325 на 3 д.м.

а) 23, 956 је између 23,9 и 24,0

Друга децимала је мања од 5, па прву децималу треба да увећамо за 1, значи да ће бити 10 (пишемо 0 и 1 прелази у цео број).

23,956 е 24,0 на 1 д.м. Нула на крају у 24,0 нам показује да је број заокругљен од 1 д. м.

б) 4,9762 је између 4,97 и 4,98.

Трећа децимала је већа од 5, па заокругљујемо „вишком".

4,9762 је 9,98 од 2 д. м.

в) 23,5804 је између 23,580 и 23,581

Четврта децимала је мања од 5, па заокругљујемо „мањком".

23,5804 је 23,580 до 3 д. м. Нула на крају од 23,580 нам казује да јје број заокругљен на 3 д.м.

г) 8,0325 је између 8,032 и 8,033

Четврта децимала је већа или једнака на 5, па заокругљујемо „вишком"

8,0325 је 8,033 до 3 д. м.

Значајне цифре

Бројеве можемо да заокруглимо на дат број **значајних цифри**.

Значајне цифре одређујемо почевши слева од прве ненулте цифре.

На место „значајних цифри“, кратко ћемо записивати „з. ц.“.

Значајне цифре за број 342,014:

3	4	2	,	0	1	4
↑	↑	↑		↑	↑	↑
прва з.ц.	друга з.ц.	трећа з.ц.		четврта з.ц.	пета з.ц.	шеста з.ц.

Прва значајна цифра је 3. То је најзначајнија цифра зато што је њена вредност 300.

Значајна цифра за број 0,0345:

0	,	03	4	5
		↑	↑	↑
		прва з.ц.	друга з.ц.	трећа з.ц.

Прва значајна цифра је 3. Нуле на почетку броја нису значајне цифре.

Када је потребно да неки број заокруглимо на дати број значајних цифри, разматрамо следећу значајну цифру. Ако је она 5 или већа од 5, онда претходну значајну цифру увећавамо за 1. У супротном, претходна значајна цифра остаје иста. Ово је врло слично као код начина заокругљивања бројева, али у овом случају посматрамо само значајне цифре.

Пример 2

Заокругли бројеве на 2 значајне цифре.

а) 789 **б)** 6,0524 **в)** 0,002534 **г)** 0,603

а)

7	8	9
↑	↑	↑
прва з.ц.	друга з.ц.	трећа з.ц.

Трећа значајна цифра је већа од 5, па заокругљујемо вишком.

789 = 790 (2 з.ц.)

Увек проверавајте дали најзначајнија цифра после заокругљивања има исту месну вредност као и пре заокругљивања. У примеру, 7 вреди 700 пре заокругљивања и опет вреди 700 након заокругљивања.

б)

6	,	0	5	2	4
↑		↑	↑		
прва з.ц.		друга з.ц.	трећа з.ц.		

Трећа значајна цифра је 5, па заокругљујемо вишком.

6,0524 = 6,1 (2 з.ц.)

в) 0 , 0 0 2 5 3 4

↑ ↑ ↑

прва друга трећа

з.ц. з.ц. з.ц.

Трећа значајна цифра је мања од 5, па заокругљујемо мањком.

0,002534 = 0,0025 (2 з.ц.)

г) 0 , 6 0 3

↑ ↑ ↑

прва друга трећа

з.ц. з.ц. з.ц.

Трећа значајна цифра је мања од 5, па заокругљујемо мањком.

0,603 = 0,60 (2 з.ц.)

На колико значајних цифри да заокруглимо?

Понекад је потребно да одлучимо са коликом тачношћу ћемо заокруглити број, односно са колико значајних цифри ћемо записати број. Број значајних цифри називамо **степен тачности.**

Крајње решење не сме да има више значајних цифри од броја значајних цифри бројева који су коришћени при израчунавању.

Пример 3

Андреј је направио 16 колача користећи укупно 125 g брашна.

Колико брашна има у сваком колачу?

Решење представи са одређеним степеном тачности.

125 : 16 = 7,8125 g

Брашно је било измерено до 3 значајне цифре (према броју датом у услову задатка).

Маса брашна у једном колачу не може да садржи више од три значајне цифре.

7,8 g (2 з. ц.) је добро одабрана тачност, зато што је заокругљено на 2 з. ц. што је за 1 з. ц. мање од броја з.ц. од датог броја у задатку.

Задачи

1. Заокругли бројеве на дати број децималних места.

а) 12,59 на 1 д.м. **б)** 3,428 на 2 д.м. **в)** 5,98 на 1 д.м. **г)** 49,9752 на 1 д.м.

д) 19,95 на 1 д.м. **ђ)** 1,0508 на 3 д.м. **е)** 3,05 на 1 д.м. **ж)** 5,8602 на 3 д.м.

2. Заокругли бројеве на 2 значајне цифре.

а) 48,2 **б)** 2,59 **в)** 5,605 **г)** 8,03

д) 40,09 **ђ)** 7,98 **е)** 29,7 **ж)** 49,09

3. Заокругли бројеве на 1 значајну цифру.

а) 32 **б)** 407 **в)** 970 **г)** 2348

д) 0,056 **ђ)** 76,8 **е)** 8345 **ж)** 99

4. Заокругли бројеве на 3 значајне цифре.

а) 4589 **б)** 23,56 **в)** 1,0435 **г)** 0,002387

д) 0,04289 **ђ)** 0,05832 **е)** 0,0088412 **ж)** 0,05997

5. Израчунај калкулатором.

Решења заокругли на 2 значајне цифре.

а) 23 : 7 **б)** 6 : 38 **в)** 3 : 129 **г)** 520 · 530

д) 0,28 : 34 **ђ)** 20 : 3 **е)** 8 : 9 **ж)** 49 : 11

6. Једна пица са масом од 0,850 kg треба подједнако да се подели на 6 људи.

По колико ће добити свако? Запиши решење у килограмима са одговарајућим степеном тачности.

7. Александар трчи 125 m за 22,5 секунди.

Колико метара пролази сваке секунде? Запиши решење у одговарајућем степену тачности.

8. Лејла је измерила растојање од 100 m.

Објасни примерима зашто не можемо да кажемо да ли је број заокругљен на 1,2 или 3 значајне цифре.

9. Марко је израчунао 3,5 · 3,5 = 12,25.

3,25 · 3,25 = 10,5625

3,255 · 3,255 = 10,595025

Покушај другим бројевима да провериш ову тврдњу.

Он каже: Када множиш број са 1 д. м. са бројем са 1 д. м., увек добијеш резултат са 2 д. м. “,

„а када множиш број са 2 д. м. са бројем са 2 д. м. увек добијеш резултат са 4 д. м.“ итд.

Да ли је Марко у праву?

10. Филип је измерио ширину своје књиге. Измерио је 23,5 cm заокругљено на једно децимално место. Колика би могла да буде најмања и највећа вредност ширине?

1.2 Степени

Степенов изложилац

У запису 5^3 број ^{3}, записан у горњем делу броја 5, називамо **степенов изложилац** или **експонент.**

Степенов изложилац нам казује колико пута је број 5 помножен са самим собом.

Број 5 називамо **основа**.

Експонент показује колико пута је основа помножена сама са собом.

$4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$

Шест четворки се множе међусобно. Да погледамо множење корак по корак.

$4 \cdot 4 = 16 \quad 16 \cdot 4 = 64 \quad 64 \cdot 4 = 256 \quad 256 \cdot 4 = 1024 \quad 1024 \cdot 4 = 4096$

Ево још неколико примера:

$9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$

$3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2187$

$7^1 = 7$

У последњем примеру експонент 1 није потребан.

За сваки број може да се рачуна да има експонент 1.

$x^1 = x$

Пример 1

Запиши у облику степена.

а) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

б) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

в) $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

а) Осам петица се множи између собом.

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^8$

б) Има шест десетки.

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$

в) Има две тројке и пет четворки.

Основе су различите, па записивање степена вршимо одвојено.

$3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 3^2 \cdot 4^5$

Пример 2

Израчунај вредност следећим степенима:

а) 2^6 **б)** 6^3 **в)** 8^7

а) $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

б) $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

в) Решења под **а)** и **б)** лако израчунавамо без употребе калкулатора.

За решење под **в)** користићемо калкулатор. На калкулатору постоји дугме означено са x^y или $x^{\blacksquare}$. Добијамо $8^7 = 2097152$.

Правила за операције са степенима са истим основама

Да размотримо производ $6^4 \cdot 6^3$

Он може да се запише овако: $6^4 \cdot 6^3 = (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^7$

четири шестице три шестице седам шестица

Скраћено: $6^4 \cdot 6^3 = 6^{4+3} = 6^7$

Значи, **правило за множење степена са истим основама је:**

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

Када се множе степени са истим основама, основа остаје иста, а експоненти се сабирају.

Сада гледамо дељење $7^5 : 7^3$

Ако запишемо у облику разломка, добићемо: $7^5 : 7^3 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}$

$= 7 \cdot 7 = 7^2$

После скраћивања, остало је $5 - 3 = 2$ седмице.

Скраћено: $7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$

Значи, **правило за дељење степена са истим основама гласи:**

$$x^a : x^b = x^{a-b}$$

Када се деле степени са истим основама, основа остаје иста, а експоненти се одузимају.

Да откријемо још два нова правила.

Да погледамо дељење $6^5 : 6^5$

Ако искористимо правило дељења степена, добијамо $6^5 : 6^5 = 6^{5-5} = 6^0$

Ако поделимо, имамо $6^5 : 6^5 = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = 1$

Два решења једног истог задатка морају бити једнака.

Добијамо $6^0 = 1$

Ово је тачно за свако дељење у облику $x^a : x^a$ и води ка следећем правилу:

$$x^0 = 1$$

Било који различит од нуле број степенован са 0 једнак је 1.

Да погледамо степен $(4^2)^5$.

То значи $4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{10}$

Знамо да је $10 = 2 \cdot 5$

Да сада размотримо $(6^3)^4 = 6^3 \cdot 6^3 \cdot 6^3 \cdot 6^3 = 6^{12}$

У овом случају знамо да је $12 = 3 \cdot 4$

Тако добијамо **правило за степеновање степена:**

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

При степеновању степена, основа остаје иста, а експоненти се множе.

Пример 3

Упрости степене.

а) $7 \cdot 7^3$ **б)** $8^9 : 8^5$ **в)** $(3^2)^7$ **г)** $5^3 \cdot (5^4)^3 : 5^7$

а) При множењу степена, сабирамо експоненте.

Знамо да је $7 = 7^1$

$7^1 \cdot 7^3 = 7^4$

б) При дељењу степена, експоненте одузимамо.

$8^9 : 8^5 = 8^4$

в) Ово је комбинација множења, дељења и степеновања степенова.

$(3^2)^7 = 3^{14}$

г) Ово је комбинација множења, дељења и степеновања степена.

$5^3 \cdot (5^4)^3 : 5^7$

$= 5^3 \cdot 5^{12} : 5^7$

$= 5^{3+12-7} = 5^8$

Пример 4

Израчунај вредности израза.

а) $4^6 : 4^4$ **б)** 25^0 **в)** $7^4 \cdot 7^5 : 7^8$

а) $4^6 : 4^4 = 4^2 = 16$ Лакше је ако упростимо израз пре степеновања.

б) $25^0 = 1$ Било који број степенован са 0 једнак је са 1.

в) $7^4 \cdot 7^5 : 7^8 = 7^{4+5-8} = 7^1 = 7$

Задаци

1. Запиши следеће производе у виду степена.

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **б)** $5 \cdot 5 \cdot 5$

в) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ **г)** $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

д) $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$ **ђ)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

е) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$ **ж)** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$

з) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ **и)** $x \cdot y \cdot y \cdot y$

ј) $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c$ **к)** $p \cdot q \cdot r \cdot p \cdot q \cdot q \cdot r \cdot r$

2. Израчунај вредности степена:

а) 2^4 **б)** 3^3 **в)** 5^4 **г)** 10^5 **д)** 9^2

ђ) 1^8 **е)** 1^{10} **ж)** 8^0 **з)** 12^1 **и)** 15^0

3. Упрости изразе. Решења запиши у виду степена.

а) $3^4 \cdot 3^5$ **б)** $4^7 \cdot 4^2$ **в)** $5^9 \cdot 5^2$ **г)** $3 \cdot 3^4$

д) $7^4 : 7^2$ **ђ)** $6^8 : 6^5$ **е)** $10^{11} : 10^4$ **ж)** $5^9 : 5^8$

з) $(2^3)^3$ **и)** $(3^4)^2$ **ј)** $(10^2)^4$ **к)** $(7^4)^6$

4. Упрости изразе. Решења запиши у виду степена.

а) $8^2 \cdot 8^3 \cdot 8^4$ **б)** $5^9 \cdot 5^2 : 5^6$ **в)** $(8^2)^3 : 8^6$

г) $(5^3)^4 \cdot 5$ **д)** $7^3 \cdot 7 : 7^2$ **ђ)** $(9^4)^5 : (9^3)^6$

е) $(5^7)^3 \cdot 5^2 : 5^8$ **ж)** $3^5 \cdot 3^3 : 3^8$ **з)** $2 \cdot 2^3 : 2^4$

и) $x^5 \cdot x^4 \cdot x^2$ **ј)** $y^8 \cdot y^4 : y^{10}$ **к)** $(t^3)^2 \cdot t^6 : t^5$

5. Упрости изразе и затим израчунај њихову вредност.

а) $2^3 \cdot 2^4 : 2^5$ **б)** $(6^3)^4 : 6^{10}$ **в)** $(5^3)^4 : (5^2)^6$

г) $7^5 : 7^4$ **д)** $10^7 \cdot 10 : 10^6$ **ђ)** $3^5 \cdot (3^3)^3 : 3^{11}$

6. Одреди вредност x у једначини.

а) $9^x = 1$ **б)** $(5^x)^3 = 5^6$ **в)** $(8^4)^x = 8^{20}$

г) $(10^x)^4 = (10^6)^2$ **д)** $(3^x)^6 = 3^6$

Под **б), в), г)** и **д)** запиши обе стране као степен.
На пример, под б) запиши $5^{3x} = 5^6$, па је $3x = 6$.

Негативан изложилац

Да погледамо дељење $4^2 : 4^3$

На основу правила о дељењу степена, добијамо: $4^2 : 4^3 = 4^{-1}$

Али, ако поделимо добијамо $4^2 : 4^3 = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = \frac{1}{4}$

Одавде добијамо да је $4^{-1} = \frac{1}{4}$

Сада разматрамо дељење $2 : 2^4$

Према правилу за дељење степена: $2 : 2^4 = 2^{-3}$

Ако поделимо, добијамо: $2 : 2^4 = \frac{\cancel{2}}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{2^3}$

Добијамо да је $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Ово су два примера за опште правило $a>0$, је:

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

Пример 5

Израчунај:

а) 3^{-2} **б)** $10^3 \cdot 10^{-5}$

а) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

б) $10^3 \cdot 10^{-5} = 10^{3-5}$

$= 10^{-2}$

$= \frac{1}{10^2}$

$= \frac{1}{100}$

Пример 6

Упрости изразе. Решења запиши у виду степена.

а) $6^3 \cdot 6^{-5} \cdot 6^4$ **б)** $(3^4)^{-1} : (3^{-2})^3$

а) $6^3 \cdot 6^{-5} \cdot 6^4$

$= 6^{3+(-5)+4}$

$= 6^2$

б) $(3^4)^{-1} : (3^{-2})^3$

$= 3^{(-4)-(-6)}$

$= 3^{-4+6}$

$= 3^2$

Примењујемо правила о сабирању и одузимању позитивних и негативних бројева.

Задаци

1. Запиши степене као разломке:

а) 2^{-4} **б)** 3^{-1} **в)** 5^{-3} **г)** 10^{-2}

д) 8^{-2} **ђ)** 7^{-2} **е)** 3^{-3} **ж)** 2^{-3}

з) 15^{-2} **и)** 10^{-3}

2. Одреди вредности следећим изразима као разломак или као цео број.

а) $5^2 \cdot 5^{-3}$ **б)** $6 \cdot 6^{-1}$ **в)** $2^4 \cdot 2^{-3}$ **г)** $10^{-2} \cdot 10$

д) $7^4 \cdot 7^{-5}$ **ђ)** $3^4 \cdot 3^{-6} \cdot 3^2$ **е)** $2^9 : 2^{10}$ **ж)** $3 : 3^{-1}$

з) $6^2 : 6^3$ **и)** $10^4 : 10^3$ **ј)** $2^5 \cdot 2^{-1} : 2^2$ **к)** $4^2 \cdot 4^{-5} \cdot 4$

3. Упрости изразе. Решења запиши у виду степена.

а) $4^3 \cdot 4^{-7}$ **б)** $5^{-2} \cdot 5^5$ **в)** $8^2 : 8^4$ **г)** $6^7 : 6^{-3}$

д) $(3^2)^{-1} \cdot 3^{-4}$ **ђ)** $2^5 : (2^2)^{-3}$ **е)** $2 \cdot 2^{-5} : 2^3$ **ж)** $3^4 : 3^{-5} \cdot (3^2)^2$

з) $x^5 \cdot x^{-5}$ **и)** $x^4 \cdot x^{-6}$ **ј)** $y^2 : y^5$ **к)** $x^7 : x^{-2} \cdot x^{-4}$

4. Израчунај вредност израза:

а) $9 \cdot 3^{-3}$ **б)** $8 \cdot 2^{-4}$ **в)** $10^{-3} \cdot 100$ **г)** $16 : 2^4$

д) $4^3 : 2^5$ **ђ)** $9^2 \cdot 3^{-3}$ **е)** $4^{-3} \cdot 8^2$ **ж)** $8^2 : 2^3 \cdot 4^{-2}$

5. Одреди вредност од x у следећим једначинама.

а) $(3^2)^x = \frac{1}{9}$ Запиши десну страну као степен од 3. $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$, па $3^{2x} = 3^{-2}$

б) $(2^x)^2 = \frac{1}{16}$ **в)** $5^x \cdot 5^6 = 25$ **г)** $7^4 \cdot 7^x = 49$

д) $(2^x)^x = 16$ Пази, постоје два могућа решења за x.

1.3 Целобројни степени броја 10

Читање и записивање целобројних степена са основом 10

Знамо да:

$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$

$10 \cdot 10 = 10^2 = 100$

$10 = 10^1 = 10$

Да размотримо правило у овом низу. Увек када се степен умањује за 1, примећујемо да:

1. на левој страни се налази једна десетица мање,

2. вредност на десној страни је подељена са 10.

Ако наставимо низ, добићемо:

$1 = 10^0 = 1$

$\frac{1}{10} = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$\frac{1}{10 \cdot 10} = 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$\frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Бројеве записане као 10^2 и 10^{-3}, називамо записи у виду степена или само степени.

Пример 1

Израчунај вредност степена: **а)** 10^6 **б)** 10^{-5}

а) $10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000000$ (један милион)

б) $10^{-5} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$

Пример 2

Запиши бројеве у виду степена: **а)** 10000 **б)** 0,0001

а) $10000 = 10^4$

б) $0{,}0001 = 10^{-4}$

Множење и дељење целобројним степенима са основом 10

Пре него што почнемо са операцијама множења и дељења, прво сваки од степена са основом 10 записујемо као број ако је степен већи од 0, или као разломак ако је степен мањи од 0. Затим множимо или делимо.

Можемо да проверимо да ли је тачан резултат, на следећи начин:

Када множимо са бројем између 0 и 1, резултат треба да буде мањи од почетног броја.

Када делимо са бројем између 0 и 1, резултат треба да буде већи од почетног броја.

Пример 3

Израчунај:

а) $245 \cdot 10^3$

б) $0{,}25 \cdot 10^{-1}$

в) $2{,}45 : 10^{-3}$

г) $230 : 10^2$

а) $245 \cdot 10^3 = 245 \cdot 1000$ — Записујемо целобројни степен од 10 као број (3 је већи од 0, значи множимо 10 · 10 · 10)

$= 245000$ — Провера: 10^3 је веће од 1, резултат је већи од 245. ✓

б) $0{,}25 \cdot 10^{-1} = 0{,}25 \cdot \frac{1}{10}$ — Записујемо целобројни степен од 10 као разломак (- 1 је мањи од 0, значи делимо 1 : 10)

$= 0{,}025$ — Провера: 10^{-1} је између 0 и 1, резултат је мањи од 0,25. ✓

в) $2{,}45 : 10^{-3} = 2{,}45 : \frac{1}{1000}$ — Записујемо целобројни степен од 10 као разломак. (- 3 је мањи од 0)

$= 2{,}45 \cdot 1000$ — Делимо разломком тако што множимо са његовим реципрочним разломком.

$= 2450$ — Провера: 10^{-3} је између 0 и 1, одговор је већи од 2,45 ✓

г) $230 : 10^2 = 230 : 100$ — Записујемо целобројни степен од 10 као број (2 је већи од 0)

$= 2{,}3$ — Провера 10^2 је већи од 1, одговор је мањи од 230 ✓

Задаци

Следеће задатке реши без употребе калкулатора.

1. Запиши бројеве у виду степена.

а) 10000000 **б)** 100 **в)** 100000 **г)** 0,00001 **д)** 0,1 **ђ)** 0,000001

2. Израчунај вредност степена.

а) 10^3 **б)** 10^5 **в)** 10^9 **г)** 10^{-5} **д)** 10^{-2} **ђ)** 10^0

3. Израчунај.

а) $2{,}3 \cdot 10^2$ **б)** $4{,}5 \cdot 10^4$ **в)** $210 \cdot 10^2$ **г)** $5{,}32 \cdot 10^5$

д) $0{,}45 \cdot 10^2$ **ђ)** $20{,}1 \cdot 10^{-1}$ **е)** $508 \cdot 10^{-2}$ **ж)** $5{,}4 \cdot 10^{-3}$

4. Израчунај.

а) $289 : 10^2$ **б)** $305 : 10^{-1}$ **в)** $25{,}8 : 10^{-2}$ **г)** $240 : 10^3$

д) $0{,}25 : 10^{-3}$ **ђ)** $0{,}205 : 10^1$ **е)** $2{,}5 : 10^2$ **ж)** $3{,}05 : 10^{-2}$

5. Препиши следеће изразе. Замени знак „?“ целобројним степеном са основом 10 да би једнакост била тачна.

Упореди производ са другим множиоцем и тако ћеш знати да ли треба да множиш или делиш са бројем већим или мањим од 1.

а) $40{,}8 \cdot ? = 408$ **б)** $248{,}9 \cdot ? = 2{,}489$ **в)** $48{,}5 : ? = 4850$ **г)** $2{,}8 : ? = 0{,}0028$

6. Препиши следеће изразе. Замени знак „?“ вредношћу за коју се добија тачна једнакост. Тражени бројеви треба да садрже цифре 2 и 4, у том редоследу.

а) $? \cdot 10^3 = 24$ **б)** $? \cdot 10^{-2} = 24$ **в)** $? : 10^5 = 2{,}4$ **г)** $? : 10^{-3} = 240$

7. Михаил је добио следећи задатак од свог наставника.

$245 \square ? = 2{,}45$

Треба $\square$ да се замени са · или :

Треба ? да се замени са бројем.

Михаил каже да има више од једног решења.

Одреди што више решења за $\square$ и ?

1.4 Множење и дељење децималним бројевима

Множење децималним бројевима

Податке које већ знамо можемо да искористимо за множење децималних бројева. Можемо да користимо **еквивалентна израчунавања** као помоћ код множења демцималних бројева.

Разлика је у томе што у коначном резултату треба да ставимо зарез.

На пример, уместо да множимо са 0,3, прво множимо са 3, а потом резултат делимо са 10.

Уместо да множимо са 0,03, прво множимо са 3, а затим резултат делимо са 100.

Ако треба да израчунамо $300 \cdot 0{,}2$, тада 300 делимо са 10, и 0,2 множимо са 10.

То нам даје $20 \cdot 2$ као еквивалентно рачунање.

Сада је лако да израчунамо $30 \cdot 2 = 60$.

Пример

Израчунај: **а)** $700 \cdot 80$ **б)** $400 \cdot 0{,}6$ **в)** $0{,}15 \cdot 0{,}06$

а) $700 \cdot 80 = 7 \cdot 100 \cdot 8 \cdot 10$
$= 7 \cdot 8 \cdot 100 \cdot 10$
$= 56 \cdot 1000$
$= 56000$

Овај начин можемо да користимо за рачунање напамет.

б) $400 \cdot 0{,}6 = 40 \cdot 6$
$= 240$

Трансформишемо еквивалентним рачунањем и добијамо исти резултат.

в) $0{,}15 \cdot 0{,}06$

Прво множимо без децималних зареза $15 \cdot 6 = 90$.

Затим израчунавамо укупан број децималних места множиоцима.

У овом случају имамо укупно 4 децимална места код оба множиоца. То значи да у решењу треба да има 4 децимална места.

Резултат је 0, 0090

Води рачуна када треба да одвојиш децимална места у решењу. Треба да бројиш децимална места добијеног производа. У нашем примеру, број 90 садржи две цифре и зато дописујемо још 2 нуле у коначни резултат. Бројање децималних места извршавамо здесна налево, односно уназад.

Задаци

Следеће задатке реши без употребе калкулатора.

1. Израчунај.

а) $30 \cdot 60$ **б)** $40 \cdot 30$ **в)** $20 \cdot 300$ **г)** $500 \cdot 30$
д) $400 \cdot 50$ **ђ)** $60 \cdot 7000$ **е)** $600 \cdot 5000$ **ж)** $240 \cdot 600$

2. Израчунај.

а) $400 \cdot 0{,}2$ **б)** $300 \cdot 0{,}8$ **в)** $800 \cdot 0{,}7$ **г)** $500 \cdot 0{,}4$
д) $150 \cdot 0{,}3$ **ђ)** $250 \cdot 0{,}7$ **е)** $125 \cdot 0{,}3$ **ж)** $25 \cdot 0{,}4$

3. Израчунај.

а) $0{,}25 \cdot 0{,}2$ **б)** $0{,}35 \cdot 0{,}4$ **в)** $0{,}24 \cdot 0{,}03$ **г)** $0{,}24 \cdot 0{,}4$
д) $0{,}02 \cdot 0{,}03$ **ђ)** $0{,}32 \cdot 0{,}04$ **е)** $0{,}55 \cdot 0{,}4$ **ж)** $7{,}5 \cdot 0{,}4$

4. Шта уочаваш у изразима?

а) $12 \cdot 0{,}2$ $48 : 20$ $6 \cdot 0{,}4$ $24 \cdot 0{,}1$ $9{,}6 : 4$
б) $64 : 20$ $32 \cdot 10^{-1}$ $80 \cdot 0{,}04$ $96 : 30$ $12{,}8 : 4$

5. Запиши неколико израза са множењем и дељењем који имају исти резултат 4,8.

6. Нађи три броја чији је производ 0,08.

Нађи три броја, чији је производ 8 и затим одлучи где треба да буду децимални зарези у сваком броју.

7. Израчунај.

а) $1,5 \cdot 1,5$ **б)** $1,2 \cdot 1,2$ **в)** $1,6 \cdot 0,16$ **г)** $14 \cdot 0,14$

Дељење децималним бројевима

Дељење са децималним бројем трансформишемо у дељење са **целим бројем**.
У то циљу користимо **еквивалентне разломке**.

Једначине које имају исту вредност називају се еквивалентне једначине.

Пример

Израчунај:

а) $\frac{6}{0,2}$ **б)** $\frac{30}{0,1}$ **в)** $\frac{0,09}{0,01}$ **г)** $2,5 : 0,05$

а) $\frac{6}{0,2} \overset{\cdot 10}{=} \frac{60}{2}$ Бројилац и именилац множимо са 10.

$= 30$

б) $\frac{30}{0,1} \overset{\cdot 10}{=} \frac{300}{1}$ Бројилац и именилац множимо са 10.

$= 300$

в) $\frac{0,09}{0,01} \overset{\cdot 100}{=} \frac{9}{1}$ Бројилац и именилац множимо са 100.

$= 9$

г) $2,5 : 0,05 = \frac{2,5}{0,05}$ Дељење записујемо као разломак.

$\frac{2,5}{0,05} \overset{100}{=} \frac{250}{5}$ Бројилац и именилац множимо са 100.

$= 50$

Задаци

Следеће задатке реши без употребе калкулатора.

1. Израчунај.

а) $\frac{6}{0,2}$ **б)** $\frac{16}{0,4}$ **в)** $\frac{12}{0,3}$ **г)** $\frac{20}{0,1}$

д) $\frac{1,4}{0,7}$ **ѓ)** $\frac{0,04}{0,2}$ **е)** $\frac{1,8}{0,3}$ **ж)** $\frac{80}{0,4}$

2. Израчунај.

а) $\frac{1,2}{0,02}$ **б)** $\frac{3,6}{0,09}$ **в)** $\frac{16}{0,08}$ **г)** $\frac{0,8}{0,04}$

д) $\frac{1,6}{0,02}$ **ђ)** $\frac{4}{0,05}$ **е)** $\frac{0,15}{0,05}$ **ж)** $\frac{14}{0,07}$

3. Израчунај.

а) $\frac{28}{0,7}$ **б)** $\frac{32}{0,04}$ **в)** $\frac{15}{0,1}$ **г)** $\frac{49}{0,01}$

д) $\frac{120}{0,04}$ **ѓ)** $\frac{90}{0,9}$ **е)** $\frac{1,6}{0,04}$ **ж)** $\frac{0,08}{0,02}$

4. Израчунај.

а) 25 : 0,1 **б)** 1,6 : 0,4 **в)** 640 : 0,08 **г)** 0,8 : 0,02

5. Али је рекао „2,5 : 0,5 је 0,5“.

Какву грешку је направио Али?

Како треба да гласи тачан одговор?

Прво израчунај тачно решење.

6. Маја има буре које садржи 140 литара воде.

Она је рекла: „Ако из бурета напуним 70 флаша, запремине 0,5 литара, онда ће се буре испразнити“.

Прво израчунај тачно решење.

Какву грешку је направила Маја?

Колико највише флаша може да се напуни из бурета?

7. **а)** 0,3 kg злата се продаје за 721521 денара.
Колика је цена за један килограм злата?

б) 0,4 kg платине се продаје за 980220 денара.
Да ли је скупље да купиш 1 kg платине или 1 kg злата? Објасни поступак.

Прво израчунај колико кошта 1 kg платине.

8. Израчунај.

а) 225 : 1,5 **б)** 125 : 2,5 **в)** 90 : 1,5

9. Једна цев је исечена на делове. Сваки део је дуг 0,25 метара.

Ако је цев дуга 4 метара, колико делова дате дужине могу да се исеку од ње?

1.5 Сабирање и одузимање разломака

Еквивалентни разломци

Разломци $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}$ имају једнаку вредност. Они су названи **еквивалентни** разломци. Ако **бројилац** и **именилац** једног разломка, помножимо са истим бројем добићемо еквивалентни разломак. Бројилац је број изнад разломачке црте, а именилац је број испод разломачке црте.

Ако бројилац и именилац једног разломка поделимо истим бројем, добићемо еквивалентни разломак. Бројилац и именилац можемо делити само истим бројем.

То се обично назива **упрошћавање** или **скраћивање**.

Када више не можемо да упростимо разломак, каже се да је **нескратив** тј. да је добијен његов најпростији облик.

Пример 1

Упрости разломак до нескративог разломка: $\frac{28}{32}$

$$\frac{28}{32} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{14}{16} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{7}{8}$$

Ово можемо да направимо једним кораком ако бројилац и именилац поделимо са 4.

$$\frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

Разломак не можемо више да упростимо. То је нескратив разломак.

Сабирање разломака

Разломци треба да имају исти именилац да бисмо могли да их сабирамо.

Ако разломци немају исти именилац, поступамо на следећи начин:

Одређујемо најмањи заједнички садржалац свим имениоцима.

Уписујемо сваки од разломака са тим имениоцем.

Сабирамо разломке.

Упрошћавамо резултат, ако је то могуће.

Један начин сабирања **мешовитих бројева** је да одвојено саберемо целе бројеве, а одвојено праве разломке. Исто тако можемо да сабирамо мешовите бројеве, ако их претходно претворимо у неправе разломке и затим применимо поступак сабирања разломака.

Мешовити број је састављен од целог броја и правог разломка.

Пример 2

Израчунај: $\frac{5}{6} + \frac{7}{8}$

Најмањи заједнички садржалац за 6 и 8 је 24.

$$\frac{5}{6} \overset{\cdot 4}{\underset{\cdot 4}{=}} \frac{20}{24} \qquad \frac{7}{8} \overset{\cdot 3}{\underset{\cdot 3}{=}} \frac{21}{24}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{20}{24} + \frac{21}{24}$$

$$= \frac{20 + 21}{24}$$

$$= \frac{41}{24}$$

$$= 1\frac{17}{24}$$

Пример 3

Израчунај: $1\frac{5}{6}+2\frac{7}{8}$

$1\frac{5}{6}+2\frac{7}{8}=1+2+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}$ Одвајамо целе делове од правог разломка.

$=3+\frac{20}{24}+\frac{21}{24}$ Сабирамо целе делове, а праве разломке записујемо једнаким имениоцима.

$=3+\frac{41}{24}$ Сабирамо праве разломке.

$=3+1+\frac{17}{24}$ Неправи разломак записујемо као збир целог дела и правог разломка.

$=4\frac{17}{24}$

Одузимање разломака

Одузимање разломака је слично са сабирањем разломака.

Ако разломци имају исти именилац, поступамо на следећи начин:

Одређујемо најмањи заједнички садржалац имениоцима.

Записујемо сваки од разломака са тим имениоцем.

Оба бројиоце одузимамо.

Упрошћујемо решење, ако је то могуће.

Када одузимамо мешовите бројеве, један од начина јесте да их запишемо као **неправе разломке.**

Разломак је неправ ако је бројилац већи од имениоца.

Пример 4

Израчунај: $1\frac{1}{2}-\frac{4}{5}$

$1\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=\frac{3}{2}-\frac{4}{5}$ Мешовити број записујемо као неправи разломак.

$\frac{3}{2}\overset{\cdot 5}{=}\frac{15}{10}$ $\quad$ $\frac{4}{5}\overset{\cdot 2}{=}\frac{8}{10}$ Најмањи заједнички садржалац за 2 и 5 је 10.

$\frac{3}{2}-\frac{4}{5}=\frac{15}{10}-\frac{8}{10}$

$=\frac{15-8}{10}$

$=\frac{7}{10}$ Одузимамо бројиоце.

Пример 5

Израчунај: $3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{5}$

$3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{5} = \frac{13}{4} - \frac{7}{5}$ Мешовите бројеве записујемо као неправе разломке.

$\frac{13}{4} \overset{\cdot 5}{=} \frac{65}{20}$ $\frac{7}{5} \overset{\cdot 4}{=} \frac{28}{20}$ Најмањи заједнички садржалац за 4 и 5 је 20.

$\frac{13}{4} - \frac{7}{5} = \frac{65}{20} - \frac{28}{20}$

$= \frac{65 - 28}{20}$

$= \frac{37}{20}$ Одузимамо бројиоце.

$= 1\frac{17}{20}$ Неправи разломак записујемо као мешовити број.

Задаци

1. Запиши разломке као нескративе разломке.

а) $\frac{4}{24}$ **б)** $\frac{16}{52}$ **в)** $\frac{12}{99}$ **г)** $\frac{18}{32}$

2. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

а) $\frac{3}{8} + \frac{3}{4}$ **б)** $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$ **в)** $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$ **г)** $1\frac{3}{4} + 1\frac{2}{3}$

3. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

а) $\frac{7}{8} - \frac{5}{16}$ **б)** $\frac{2}{3} - \frac{4}{7}$ **в)** $2\frac{3}{8} - \frac{2}{3}$ **г)** $2\frac{4}{9} - \frac{7}{12}$

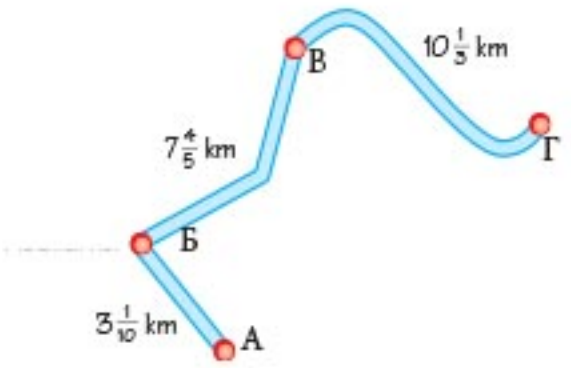
4. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

а) $\frac{11}{18} + \frac{7}{24}$ **б)** $\frac{13}{36} + \frac{11}{20}$ **в)** $\frac{7}{24} - \frac{5}{30}$ **г)** $\frac{8}{15} - \frac{7}{27}$

5. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

а) $3\frac{5}{12} + 4\frac{11}{18}$ **б)** $7\frac{17}{24} + 3\frac{15}{32}$ **в)** $5\frac{7}{18} - 2\frac{11}{12}$ **г)** $4\frac{11}{24} - 1\frac{13}{18}$

6. Никола вози бицикл од места А до места Г. Он је успут стао у место Б и В.



Колико је укупно пута у километрима прошао Никола? Решење запиши као нескратив разломак.

7. Пуна тегла мармеладе има укупну масу $\frac{9}{20}$ kg.
Само мармелада има масу $\frac{7}{24}$ kg.
Колика је маса тегле?

8. Израчунај разломке који недостају.
а) $2\frac{5}{12} + ? = 4\frac{5}{16}$ **б)** $5\frac{7}{12} - ? = \frac{11}{18}$

Прво запиши разломке као неправе разломке.

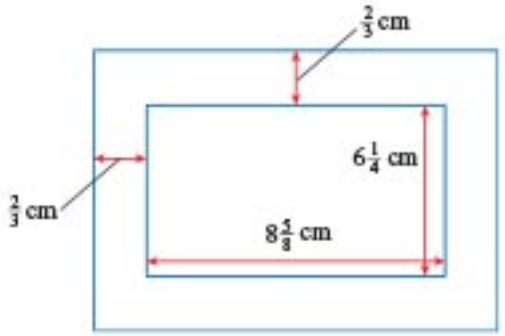
9. **а)** Бројеви $\frac{1}{2}$, a, $\frac{3}{4}$ су поређани по растућем редоследу.
Вредност a је тачно у средини између $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$.
Израчунај вредност a.

б) Бројеви $\frac{1}{2}$, m, n, $\frac{3}{4}$ су поређани по растућем редоследу.
Разлике између било која два суседна броја су једнаке.
Израчунај вредност за m и n.

Користи еквивалентне разломке.

10. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.
а) $1\frac{2}{5} + \frac{7}{20} + \frac{7}{30}$ **б)** $1\frac{4}{5} + \frac{1}{6} + \frac{7}{12}$ **в)** $1\frac{3}{5} + 2\frac{5}{6} + \frac{8}{15}$
г) $4\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{7}{20}$ **д)** $3\frac{2}{3} + 1\frac{5}{6} - \frac{14}{15}$ **ђ)** $4\frac{3}{8} + \frac{7}{12} - \frac{5}{6}$

11. Правоугаона фотографија је дугачка $6\frac{1}{4}$ cm и широка $8\frac{5}{8}$ cm.
а) Колики је обим фотографије?
б) Фотографија је стављена у рам ширине $\frac{2}{3}$ cm.
Колики је обим рама?



1.6 Множење разломака

Множење целог броја разломком

Производ $3 \cdot \frac{4}{5}$ можемо записати као $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}$ односно као $\frac{4+4+4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$

Цео број множимо разломком тако што именилац остаје исти, а бројилац множимо целим бројем.

Да бисмо израчунали део једне вредности, дати разломак множимо том вредношћу.

Подсетимо се да „од“ значи „помножи“, према томе, $\frac{2}{3}$ од 36 значи $\frac{2}{3} \cdot 36$

Пример 1

Израчунај: **а)** $\frac{5}{8} \cdot 36$ **б)** $\frac{7}{12}$ од 18

а) $\frac{5}{8} \cdot 36 = \frac{180}{8}$

$= \frac{45}{2}$

$= 22\frac{1}{2}$

б) $\frac{7}{12} \cdot 18 = \frac{126}{12}$

$= \frac{21}{2}$

$= 10\frac{1}{2}$

Ако прво помножимо, могу се појавити велики бројеви. Да бисмо избегли рад са великим бројевима, прво скраћујемо, а затим множимо.

а) $\frac{5}{\cancel{8}_{2}} \cdot \overset{9}{\cancel{36}} = \frac{45}{2}$ Скраћујемо са 4.

$= 22\frac{1}{2}$

б) $\frac{7}{\cancel{12}_{2}} \cdot \overset{3}{\cancel{18}} = \frac{21}{2}$ Скраћујемо са 6.

$= 10\frac{1}{2}$

Множење разломка разломком

Производ два разломка је разломак чији је бројилац једнак производу бројилаца тих разломака, а именилац је једнак производу њихових именилаца

Да бисмо избегли велике бројеве, пре множења вршимо скраћивање као у Примеру 2.

Када множимо мешовите бројеве, претходно морамо да их запишемо као неправе разломке.

Пример 2

Израчунај производе. Решења запиши као неправе разломке.

а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}$ **б)** $\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{28}$

а) $\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3} \cdot \frac{5}{\cancel{8}_{4}} = \frac{5}{12}$ Кратимо са 2.

б) $\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\cancel{12}_{4}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{28}_{4}} = \frac{1}{16}$ Кратимо са 7, па кратимо са 3.

Пример 3

Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

У решењима, неправе разломке запиши као мешовите бројеве.

а) $2\frac{5}{8} \cdot 2\frac{2}{7}$ **б)** $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{1}{10}$

а) $2\frac{5}{8} \cdot 2\frac{2}{7} = \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{1}{\cancel{8}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{6}{1} = 6$

б) $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{1}{10} = \frac{\overset{12}{\cancel{24}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$

Задаци

1. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

Неправе разломке у решењу запиши као мешовите бројеве.

а) $\frac{2}{3}$ од 36 **б)** $\frac{3}{8}$ од 24 **в)** $\frac{2}{5}$ од 24 **г)** $\frac{5}{12}$ од 16

д) $\frac{3}{4} \cdot 24$ **ђ)** $\frac{7}{8} \cdot 20$ **е)** $\frac{7}{15} \cdot 24$ **ж)** $\frac{5}{12} \cdot 28$

2. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

Неправе разломке у решењу запиши као мешовите бројеве.

а) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9}$ **б)** $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{9}$ **в)** $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{5}$ **г)** $\frac{6}{11} \cdot \frac{4}{9}$

3. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

Неправе разломке у решењу запиши као мешовите бројеве.

а) $1\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5}$ **б)** $2\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{7}$ **в)** $\frac{25}{32} \cdot 3\frac{1}{5}$ **г)** $1\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}$

д) $1\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{8}$ **ђ)** $\frac{4}{5} \cdot 2\frac{1}{12}$ **е)** $\frac{2}{5} \cdot 1\frac{7}{8}$ **ж)** $2\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{7}$

з) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10}$ **и)** $1\frac{1}{9} \cdot 2\frac{2}{5}$ **ј)** $1\frac{7}{8} \cdot 1\frac{1}{5}$ **к)** $2\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4}$

л) $2\frac{2}{9} \cdot \frac{6}{25}$ **љ)** $1\frac{1}{10} \cdot 1\frac{11}{25}$ **м)** $4\frac{1}{6} \cdot 1\frac{13}{35}$ **н)** $1\frac{11}{12} \cdot 1\frac{1}{5}$

4. Лејла путује 24 km до посла сваког дана.

Она вози бицикл $\frac{3}{5}$ пута, а затим наставља пешице.

За колико километара је дужи пређени пут бициклом него пешице?

5. У једној кутији има 6 идентичних књига са меким корицама, свака масе $\frac{3}{10}$ *kg*, и 5 идентичних књига са тврдим корицама, свака масе $\frac{4}{5}$ *kg*. Празна кутија има масу $2\frac{3}{8}$ kg. Колика је укупна маса кутије са свим књигама у њој?

Израчунај укупну масу књига са тврдим корицама и укупну масу књига са меким корицама.

6. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

Неправе разломке запиши у решења као мешовите бројеве.

а) $1\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{2}$ **б)** $2\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{3}$

1.7 Дељење разломака

Дељење целог броја разломком

Цео број делимо разломком тако што број множимо
његовим реципрочним разломком. Реципрочни раломак је разломак у којем бројилац и именилац замењују места,односно разломак ћемо „окренути наопако".

Пример 1

Израчунај $4 : \frac{2}{3}$

$$4 : \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{1} = 6$$

$\frac{3}{2}$ је реципрочни разломак од $\frac{2}{3}$

Дељење разломка разломком

Један разломак делимо другим разломком тако што први разломак помножимо реципрочном вредношћу другог разломка.

Да запамти да пре дељења мешовите бројеве треба да запишемо као разломке.

Пример 2

Израчунај: $2\frac{6}{7} : 1\frac{1}{4}$

$$2\frac{6}{7} : 1\frac{1}{4} = \frac{20}{7} : \frac{5}{4} = \frac{20}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$$

$\frac{4}{5}$ је реципрочни разломак од $\frac{5}{4}$

Задаци

1. Израчунај.

а) $4 : \frac{1}{2}$ **б)** $3 : \frac{3}{4}$ **в)** $6 : \frac{3}{8}$ **г)** $8 : \frac{2}{5}$

2. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.
Неправе разломке у решењу запиши као мешовите бројеве.

а) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ **б)** $\frac{7}{10} : \frac{3}{5}$ **в)** $\frac{12}{19} : \frac{6}{7}$ **г)** $\frac{16}{25} : \frac{8}{15}$

3. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

Неправе разломке у решењу запиши као мешовите бројеве.

а) $1\frac{7}{9} : 2\frac{2}{3}$ б) $\frac{8}{15} : \frac{24}{25}$ в) $\frac{5}{18} : 2\frac{1}{12}$ г) $1\frac{1}{15} : 1\frac{3}{5}$

д) $1\frac{7}{8} : 2\frac{1}{4}$ ђ) $1\frac{1}{8} : 1\frac{1}{2}$ е) $1\frac{1}{20} : 2\frac{4}{5}$ ж) $1\frac{7}{8} : \frac{3}{4}$

з) $3\frac{3}{5} : \frac{9}{10}$ и) $\frac{4}{9} : 2\frac{2}{3}$ ј) $2\frac{1}{10} : 2\frac{4}{5}$ к) $2\frac{2}{5} : \frac{8}{15}$

л) $2\frac{1}{4} : \frac{3}{10}$ љ) $1\frac{7}{8} : \frac{5}{12}$ м) $2\frac{2}{3} : 2\frac{2}{9}$ н) $1\frac{11}{25} : 1\frac{1}{15}$

4. Једна празна кутија има масу $3\frac{3}{8}$ kg.

Једна алатка има масу $1\frac{1}{8}$ kg.

Масу кутије урачунај само једном.

Кутија може да носи укупну масу укључујући и садржај мањи од 25 kg.

Колики је највећи број алатки који може да стане у кутију?

5. Израчунај. Упрости одговоре колико је то могуће.

а) $2\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} : 1\frac{3}{5}$ б) $1\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{7} : 1\frac{1}{24}$

6. У једној кутији има 20 идентичних колачића.

Празна кутија има масу $12\frac{1}{2}$ g.

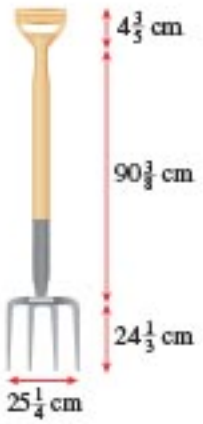
Сваки колачић има масу $5\frac{2}{5}$ g.

Колика је укупна маса кутије са колачићима у њој?

7. На цртежу је приказана баштенска вила.

а) Колика је укупна дужина виле?

б) Колика је разлика између растојања суседних зубаца виле?



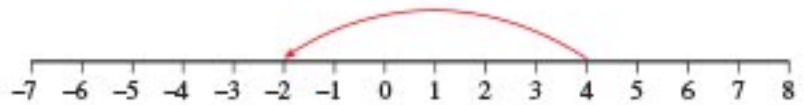
1.8 Позитивни и негативни бројеви

Сабирање и одузимање

Позитивне и негативне бројеве приказујемо на бројевној оси тако што су лево од нуле негативни бројеви, а десно од нуле позитивни бројеви.

Бројевну осу можемо да користимо за сабирање и одузимање позитивних и негативних бројева.

На цртежу је приказан збир од $(+4) + (-6)$



Црвена стрелица показује да почињемо од +4 и крећемо се 6 корака улево.

За мале целе бројеве можемо да користимо бројевну осу.

За друге бројеве користимо следећа правила за ослобађање заграда.

+ + замењује се са +	на пример, –4 + (+6) замењује се са –4 + 6 = +2
+ – замењује се са –	на пример, –4 + (–6) замењује се са –4 – 6 = –10
– + замењује се са –	на пример, –4 – (+6) замењује се са –4 – 6 = –10
– – замењује се са +	на пример, –4 – (–6) замењује се са –4 + 6 = +2

Пример 1

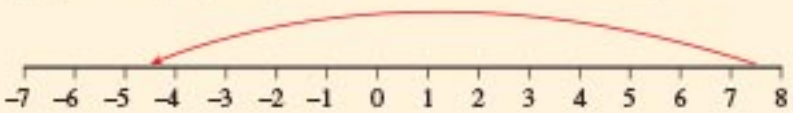
Израчунај.

а) (+7,5) – (+12,2) **б)** (–8,1) + (+14,8) **в)** (–23,5) – (–17,8)

а) (+7,5) – (+12,2)

= +7,5 – 12,2 – + је једнако са –

Децималне бројеве на бројевној оси теже можемо да сабирамо.



Уместо тога, израз 7,5 - 12, 2 записујемо његовим супротним бројевима: 12,2 – 7,5

Калкулатор користимо само ако радимо са врло великим бројевима.

12,2 – 7,5 = 4,7

Према томе, 7,5 – 12,2 = –4,7

12,2
– 7,5
4,7

б) (–8,1) + (+14,8)

= –8,1 + 14,8 + + је једнако са +

= 14,8 – 8,1

= 6,7

в) (–23,5) – (–17,8)

= –23,5 + 17,8 – – је једнако са +

= – (23,5 – 17,8) користимо инверзну операцију

= –5,7

Множење и дељење

Правила множења и дељења позитивних и негативних бројева:

позитиван и позитиван = позитиван

позитиван и негативан = негативан

негативан и позитиван = негативан

негативан и негативан = позитиван

Правила кратко записујемо:

+ + добиће се +
+ – добиће се –
– + добиће се –
– – добиће се+

Основно правило је исто и за множење и за дељење.
Ако су оба знака иста, онда ће резултат бити позитиван.
Ако су знакови различити, онда ће резултат бити негативан.

Пример 2

Израчунај: **а)** $-7 \cdot (+12)$ **б)** $-23{,}6 \cdot (-9)$ **в)** $(-63) : 9$ **г)** $220{,}8 : (-12)$

а) Знаци су различити, па ће резултат бити негативан.

Знамо да је $7 \cdot 12 = 84$

Зато је $-7 \cdot 12 = -84$

б) Знаци су једнаки, па ће резултат бити позитиван.

Рачунамо $23{,}6 \cdot 9 = 212{,}4$

Зато, $-23{,}6 \cdot (-9) = 212{,}4$

$$\begin{array}{r} 23{,}6 \\ \cdot\ \ 9 \\ \hline 212{,}4 \\ \hline 3\ 5 \end{array}$$

в) Знаци су различити, па ће резултат бити негативан.

Знамо да је $63 : 9 = 7$

Зато, $-63 : 9 = -7$

г) Знаци су различити, па ће резултат бити негативан.

Рачунамо $220{,}8 : 12 = 18{,}4$

Зато, $220{,}8 : (-12) = -18{,}4$

$$\begin{array}{r} 220{,}8 : 12 = 18{,}4 \\ -12 \\ \hline 100 \\ -96 \\ \hline 48 \\ -48 \\ \hline 0 \end{array}$$

Пример 3

Израчунај: **а)** $(-4)\cdot(+8)\cdot(-10)$ **б)** $(-6)^2$

а) Када у изразу има више од два броја, тада треба да рачунамо према редоследу записивања.

Да бисмо поједноставили, можемо да записујемо у заградама.

$(-4)\cdot(+8)\cdot(-10)$

$=((-4)\cdot(+8))\cdot(-10)$

$=(-32)\cdot(-10)$

$=320$

Ако имамо паран број негативних знакова, резултат ће бити позитиван.

Ако имамо непаран број негативних знакова, резултат ће бити негативан.

б) $(-6)^2=(-6)\cdot(-6)=36$

Када квадрирамо негативан број, резултат је позитиван.

Задаци

Израчунај:

1. $(-2{,}5)+(+8{,}5)$ **2.** $3+(-9)$ **3.** $(-6{,}4)-(+9)$

4. $6{,}2-(-8{,}5)$ **5.** $(-13)+(-14)$ **6.** $(-8)+(+28)$

7. $(-5{,}8)-(-7{,}8)$ **8.** $0{,}5+(+1{,}5)$ **9.** $(-3{,}9)+(+4{,}9)$

10. $(-5{,}2)+(-4{,}8)$ **11.** $7{,}6-(+5{,}3)$ **12.** $3-(+13{,}6)$

13. $15{,}3+(-12{,}2)$ **14.** $(-12{,}8)-(+13{,}8)$ **15.** $(-21)-(-26{,}9)$

16. $(-13{,}7)+(-16{,}8)$ **17.** $-9\cdot(+8)$ **18.** $-7\cdot(-6)$

19. $+9{,}2\cdot(-5)$ **20.** $-4{,}3\cdot(-8)$ **21.** $+16{,}3\cdot(+5)$

22. $-17{,}2\cdot(+3)$ **23.** $+25{,}8\cdot(-2)$ **24.** $-16{,}4\cdot(-10)$

25. $-72:8$ **26.** $-48:(-6)$ **27.** $128:(-8)$

28. $-354:(-6)$ **29.** $18{,}7:(-11)$ **30.** $-650:(-10)$

31. $-65{,}1:7$ **32.** $-89{,}5:(-5)$ **33.** $(-3)^2$

34. $(-8)^2$ **35.** $(-10)^2$ **36.** $-5\cdot(-4)\cdot 6$

37. $-4\cdot(-2)\cdot(-7)$ **38.** $9\cdot(-3)\cdot(-10)$ **39.** $-3\cdot 8\cdot(-4)\cdot(-10)$

40. $(-2)^3$ $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$

Задаци за понављање

1. Заокругли бројеве на дати број децималних места.

а) 2,58 на 1 д.м. **б)** 2,68961 на 2 д.м. **в)** 2,089 на 1 д.м.

г) 8,99 на 1 д.м. **д)** 2,034 на 1 д.м.

2. Заокругли бројеве на дати број децималних места.

а) 458 на 2 з.ц. **б)** 2,35841 на 3 з.ц. **в)** 0,0258 на 1 з.ц.

г) 99,8 на 2 з.ц. **д)** 99,8 на 1 з.ц.

3. Израчунај.

а) $60 \cdot 300$ **б)** $5000 \cdot 20$ **в)** $300 \cdot 0{,}8$ **г)** $250 \cdot 0{,}2$

д) $0{,}35 \cdot 0{,}2$ **ђ)** $0{,}08 \cdot 0{,}04$ **е)** $0{,}24 \cdot 0{,}6$ **ж)** $6000 \cdot 0{,}09$

4. Запиши изразе у облику степена.

а) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ **б)** $12 \cdot 12 \cdot 12$ **в)** $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$

г) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

5. Упрости изразе. Решења запиши у облику степена.

а) $4^2 \cdot 4^4$ **б)** $5^8 : 5^3$ **в)** $6^2 \cdot 6^4 \cdot 6$ **г)** $(10^2)^3$

д) $(5^3)^4$ **ђ)** $x^4 \cdot x^3 : x$ **е)** $y^5 : y^3 \cdot y^2$ **ж)** $x^4 \cdot x^3 : x^{-1}$

6. Упрости изразе и затим израчунај њихову вредност.

а) $8^{-5} \cdot 8^7$ **б)** $(5^2)^3 : 5^4$ **в)** $9 : 3^2$ **г)** $16 \cdot 2^{-3}$

7. Израчунај.

а) $\frac{2}{0{,}4}$ **б)** $\frac{16}{0{,}8}$ **в)** $\frac{14{,}4}{0{,}9}$ **г)** $\frac{1{,}8}{0{,}6}$ **д)** $\frac{6{,}3}{0{,}07}$

ђ) $\frac{1{,}5}{0{,}01}$ **е)** $\frac{0{,}8}{0{,}02}$ **ж)** $\frac{0{,}18}{0{,}03}$ **з)** $3 : 0{,}1$ **и)** $20 : 0{,}01$

8. Израчунај.

а) $4{,}5 \cdot 10^2$ **б)** $450 \cdot 10^{-1}$ **в)** $508 \cdot 10^{-3}$ **г)** $0{,}0054 \cdot 10^3$

д) $0{,}0492 \cdot 10^{-1}$ **ђ)** $42 : 10^2$ **е)** $589 : 10^1$ **ж)** $0{,}05 : 10^{-3}$

з) $0{,}0089 : 10^{-2}$ **и)** $0{,}025 : 10^{-3}$

9. Одреди вредност.

а) 6^2 **б)** $(-8)^2$ **в)** 15^2 **г)** $(-17)^2$

д) 1^8 **ђ)** 12^0 **е)** 5^{-2} **ж)** 6^{-1}

10. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

а) $\frac{13}{20} + \frac{11}{18}$ **б)** $\frac{5}{12} - \frac{3}{20}$ **в)** $3\frac{25}{32} + 4\frac{7}{24}$ **г)** $4\frac{7}{27} - 2\frac{11}{18}$

11. Елена је пешачила $\frac{4}{5}$ km до аутобуске станице.

Затим се возила $4\frac{2}{3}$ km аутобусом.

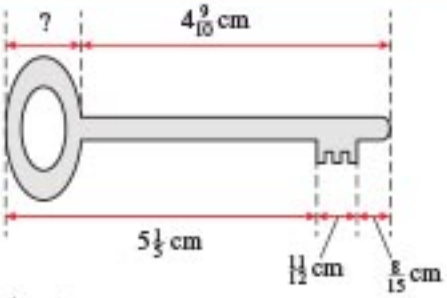
На крају је пешачила $\frac{7}{12}$ km пешице до школе.

Колико је укупно километара путовала Елена?

12. Употреби дужине приказане на слици да одредиш:

а) укупну дужину кључа,

б) дужину „главе“ кључа.



13. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

Неправе разломке у решењу запиши као мешовите бројеве.

а) $\frac{4}{15} \cdot \frac{9}{16}$ **б)** $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8}$ **в)** $\frac{4}{25} \cdot \frac{15}{16}$

г) $2\frac{7}{10} \cdot 2\frac{7}{9}$ **д)** $4\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{28}$ **ђ)** $2\frac{2}{9} \cdot 1\frac{11}{25}$

14. Израчунај. Решења запиши као нескративе разломке.

Неправе разломке у решењу запиши као мешовите бројеве.

а) $1\frac{3}{8} : \frac{1}{4}$ **б)** $\frac{4}{5} : \frac{3}{10}$ **в)** $\frac{7}{8} : \frac{5}{12}$

г) $4\frac{2}{3} : \frac{7}{9}$ **д)** $2\frac{5}{8} : 1\frac{5}{16}$ **ђ)** $1\frac{1}{6} : 2\frac{1}{3}$

2 Алгебра и решавање проблема

Наставни циљеви

- Зна порекло речи „алгебра“ и везу тог појма са радовима арапског математичара Ал Хорезмија.
- Користи и записује степене чији је изложилац природан број; примењује правила за множење и дељење степена у трансформацији алгебарских израза.
- Упрошћавање или претварање алгебарских израза путем извлачења монома као заједничког множиоца.
- Сабирање и одузимање једноставних алгебарских разломака.
- Састављање и решавање линеарних једначина са коефицијентима целих бројева (са или без заграде, негативних знакова у једначини, позитивних или негативних решења); решавање проблема са бројевима уз састављање и решавање линеарних једначина.
- Састављање алгебарских израза.
- Налажење инверзне функције линеарне функције.
- Постављање чланова у низ коришћењем правила за одређивање следећег члана и одређивања било ког члана у низу користећи општи члан.
- Извођење израза ради описивања n-тог члана у аритметичком низу.

Ал Хорезми

Мухамед ибн Муса ал Хорезми био је познати арапски математичар, рођен 783. године.

Он је написао много књига. У свом делу „Приручник за рачунице и метод равнотеже“ користи реч „ал - хабра“ што значи одузимање броја са обе стране једне једначине.

Од речи „ал - хабра“ потиче данашња реч „алгебра“.

Једина арапска копија поменутог дела чува се на Оксфорду, а њен превод на латински језик чува се на Кембрицу.

Слика представља поштанску марку насталу 1983. године, поводом 1200. годишњице Ал Хорезмијевог рођења.



2.1 Упрошћавање степена

Можемо да запишемо $a \cdot a \cdot a \cdot a$ као a^4 ← степенов изложилац (експонент); ← основа

и $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$ како y^7

$3x \cdot 2x \cdot 5x$ као $3 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 5 \cdot x = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x$

$= 30 \cdot x^3$

$= 30x^3$

$\frac{2x}{6}$ можемо да запишемо као $\frac{2 \cdot x}{2 \cdot 3}$ што може да се упрости до $\frac{x}{3}$

Пример 1

Упрости изразе: **а)** $5a \cdot a \cdot 2a$ **б)** $2x \cdot 3y \cdot x \cdot 4y$

а) $5a \cdot a \cdot 2a = 5 \cdot a \cdot a \cdot 2 \cdot a$

$= 5 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a$

$= 10a^3$

б) $2x \cdot 3y \cdot x \cdot 4y = 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y \cdot x \cdot 4 \cdot y$

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$

$= 24x^2y^2$

Пример 2

Упрости изразе: **а)** $\frac{12x}{3y}$ **б)** $\frac{5x^2}{10xy}$

а) $\frac{12x}{3y} = \frac{3 \cdot 4 \cdot x}{3 \cdot y}$ Делимо бројилац имениоцем 3.

$= \frac{4x}{y}$

б) $\frac{5x^2}{10xy} = \frac{5 \cdot x \cdot x}{2 \cdot 5 \cdot x \cdot y}$ Делимо бројилац имениоцима 5 и x.

$= \frac{x}{2y}$

Задаци

1. Упрости:

а) $3x \cdot 4x$ **б)** $5x \cdot x$ **в)** $2y \cdot y \cdot 3y$

г) $2a \cdot 3a \cdot 4a$ **д)** $2b \cdot 3b \cdot b \cdot 4b \cdot b$ **ђ)** $4p \cdot p \cdot 3p \cdot p \cdot p$

2. Упрости:

а) $5a \cdot a \cdot 2b$ **б)** $2p \cdot 3q \cdot p \cdot 4q \cdot p$ **в)** $7x \cdot 3y \cdot 2x$

г) $2x \cdot 3y \cdot 4y \cdot 5x$ **д)** $6a \cdot b \cdot a \cdot 7ab$ **ђ)** $x \cdot 8xy \cdot 2xy \cdot 3x$

3. Упрости:

а) $\frac{5x}{10}$ **б)** $\frac{6y}{8}$ **в)** $\frac{8a}{12}$ **г)** $\frac{14x}{21}$ **д)** $\frac{6x}{4}$

ђ) $\frac{5x}{x^2}$ **е)** $\frac{3x^2}{12x}$ **ж)** $\frac{12xy}{8x}$ **з)** $\frac{6y}{y^2}$ **и)** $\frac{2xy}{y^2}$

ј) $\frac{7x}{14y}$ **к)** $\frac{9xy}{3xyz}$ **л)** $\frac{8ab^2}{b}$ **љ)** $\frac{2xy}{6x^2y^2}$ **м)** $\frac{2a^2b}{5ab^2}$

4. Запиши бројеве као степене са основом 2, односно у облику 2^x. (На пример, $16 = 2^4$)

а) 32 **б)** 8 **в)** 4 **г)** 64 **д)** 256

5. Запиши бројеве у виду x^y. (На пример, $125 = 5^3$)

а) 49 **б)** 27 **в)** 10000 **г)** 169 **д)** 243

6. Реши једначине.

Прва једначина је решена као пример.

а) $2^x = 8$ Запиши 8 као степен са основом 2.

$2^x = 2^3$ Основе су једнаке, па и степенови изложиоци морају бити исти.

$x = 3$

б) $2^x = 64$ **в)** $3^x = 9$ **г)** $10^x = 100$ **д)** $5^x = 125$ **ђ)** $2^x = 256$

е) $4^x = 64$ **ж)** $2^x = 512$ **з)** $3^x = 27$ **и)** $2^x = 16$ **ј)** $3^x = 81$

7. Реши једначине.

Прва једначина је решена као пример.

а) $5^{x+1} = 125$ Запиши 125 kg као степен са основом 5.

$5^{x+1} = 5^3$ Основе су једнаке, па и степенови изложиоци морају бити исти.

$x + 1 = 3$ Одузми 1 са обе стране.

$x = 2$

б) $2^{2x} = 64$ **в)** $2^{x+1} = 16$ **г)** $2^{x-1} = 8$ **д)** $5^{x-2} = 125$ **ђ)** $3^{x-1} = 81$

е) $2^{x-2} = 128$ **ж)** $2^{2x+1} = 32$ **з)** $5^{x-1} = 125$ **и)** $3^{2x+1} = 27$ **ј)** $10^{3x} = 1000000$

2.2 Правила за операције са степенима са истим основама

Следећа три правила су позната као правила за операције са степенима са истим основама.

Множење степена са истим основама

Да погледамо производ $2^5 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^8$

Ако повежемо почетак и крај једнакости добићемо: $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

ПРАВИЛО 1 $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

Дељење степена са истим основама

Погледајмо дељење $4^5 : 4^3 = \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot 4\cdot 4}{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}} = 4^2$

Ако повежемо почетак и крај једначине добићемо: $4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2$

ПРАВИЛО 2 $x^a : x^b = x^{a-b}$

Степеновање степена

Да погледамо степен: $(5^2)^3 = (5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5) = 5^6$

Ако повежемо почетак и крај једнакости, добићемо: $(5^2)^3 = 5^{2\cdot 3} = 5^6$

ПРАВИЛО 3 $(x^a)^b = x^{a\cdot b}$

Пример 1

Упрости: **а)** $y^3\cdot y^4$ **б)** $a^8 : a^3$ **в)** $(f^3)^4$

а) $y^3\cdot y^4 = y^{3+4}$ Сабирамо степенове изложиоце.
$= y^7$

б) $a^8 : a^3 = a^{8-3}$ Одузимамо степенове изложиоце.
$= a^5$

в) $(f^3)^4 = f^{3\cdot 4}$ Множимо степенове изложиоце.
$= f^{12}$

Пример 2

Упрости: **а)** $5xy^2\cdot 2x^2y^5\cdot 7x^3y^4$ **б)** $\frac{2x^7y^8}{6x^3y^2}$

а) $5xy^2\cdot 2x^2y^5\cdot 7x^3y^4 = 5\cdot 2\cdot 7\cdot x^1\cdot x^2\cdot x^3\cdot y^2\cdot y^5\cdot y^4$
$= 70\cdot x^{1+2+3}\cdot y^{2+5+4}$
$= 70x^6y^{11}$

б) $\frac{2x^7y^8}{6x^3y^2} = \frac{2}{6}\cdot(x^7 : x^3)\cdot(y^8 : y^2)$
$= \frac{1}{3}\cdot x^{7-3}\cdot y^{8-2}$
$= \frac{x^4y^6}{3}$

Задачи

Упрости изразе.

1. а) $x^3\cdot x^2$ **б)** $y^2\cdot y^4$ **в)** $a^5\cdot a$ **г)** $p^4\cdot p^7$

д) $f\cdot f^3$ **ђ)** $y^3\cdot y^3$ **е)** $q^6\cdot q^3$ **ж)** $d^4\cdot d^8$

2. а) $2x^3 \cdot 3x^4$ б) $4y^5 \cdot 2y^3$ в) $3a^4 \cdot 5a^2$ г) $4f^2 \cdot f^5$

д) $5y^3 \cdot 5y^3$ ђ) $4d \cdot 3d^5$ е) $7e^8 \cdot 4e^6$ ж) $9c^4 \cdot 4c^9$

3. а) $x^3 \cdot x^5 \cdot x^7$ б) $y^6 \cdot y \cdot y^2$ в) $2a^3 \cdot 5a^2 \cdot 3a^4$ г) $8d^4 \cdot d \cdot 2d^7$

4. а) $x^7 : x^2$ б) $x^8 : x^4$ в) $a^8 : a^5$ г) $p^6 : p$

5. а) $\frac{16x^7}{4x^5}$ б) $\frac{8x^6}{16x^2}$ в) $\frac{3a^5}{12a^2}$ г) $\frac{2y^8}{8y^2}$

д) $\frac{5y^7}{15y^4}$ ђ) $\frac{12w^6}{18w^2}$ е) $\frac{25a^8}{50a^3}$ ж) $\frac{18g^5}{27g^2}$

6. а) $\frac{x^4 \cdot x^3}{x^5}$ б) $\frac{y^8 \cdot y^8}{y^7}$ в) $\frac{x^{10}}{x^2 \cdot x^4}$ г) $\frac{a^4 \cdot a^7}{a^2 \cdot a^3}$

д) $\frac{2x^2 \cdot 3x^5}{4x^3}$ ђ) $\frac{3y^4 \cdot 6y^3}{2y^5}$ е) $\frac{8x^9}{2x^3 \cdot 2x^4}$ ж) $\frac{2a^5 \cdot 5a^2}{3a \cdot 4a^4}$

7. а) $(y^3)^2$ б) $(x^4)^3$ в) $(x^2)^6$ г) $(a^4)^4$ $(y^3)^2$ значи $y^3 \cdot y^3$

8. а) $(2x^3)^2$ б) $(3a^2)^4$ в) $(10y^4)^3$ г) $\left(\frac{h^3}{2}\right)^2$ $(2x^3)^2$ значи $2x^3 \cdot 2x^3$

2.3 Разлагање множиоца

У VIII разреду смо учили о поступку за **ослобађање од заграда**.

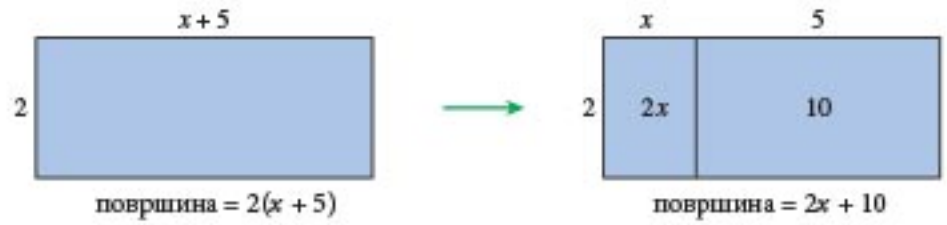
То значи да израз $2(x + 5)$ можемо да запишемо као $2x + 10$.

Ово можемо да објаснимо на два различита начина.

Први начин

Цртежом.

Површина правоугаоника са страницама 2 и $x + 5$ може да се нађе поделом правоугаоника на два дела као што је приказано на цртежу.



Прама томе, $2(x + 5) = 2x + 10$.

Други начин

Множењем.

$2(x + 5) = 2 \cdot x + 2 \cdot 5$ ← Сваки члан у заградама се множи са 2.

$= 2x + 10$

Разлагање множиоца је инверзни поступак ослобађања од заграда. Овим поступком је потребно да све заједничке множиоце чланова у заградама извучемо испред заграде.

Према томе, израз $2x + 10$ записујемо као $2(x + 5)$.

Када је потребно да један израз разложимо на множиоце, важно је да их разложимо у потпуности.

На пример, $12x + 8 = 2(6x + 4)$ је само делимично разлагање множиоца.

Потпуним разлагањем добијамо $12x + 8 = 4(3x + 2)$.

Пример

Разложи изразе на множиоце. **а)** $30x + 12$ **б)** $3x^2 - 9xy$ **в)** $6xy^2 + 8x^2y^3$

а) $30x + 12$
$= 6(5x + 2)$

6 је највећи заједнички делилац (НЗД) за оба члана.
$30x = 6 \cdot 5x$ и $12 = 6 \cdot 2$.
Потребно је да проверимо резултат помоћу ослобађања од заграда.
провера: $6(5x + 2) = 6 \cdot 5x + 6 \cdot 2 = 30x + 12$.

б) $3x^2 - 9xy$
$= 3x(x - 3y)$

3 је НЗД за оба члана.
$3x^2 = 3x \cdot x$ и $9xy = 3x \cdot 3y$.
провера: $3x(x - 3y) = 3x \cdot x - 3x \cdot 3y = 3x^2 - 9xy$.

в) $6xy^2 + 8x^2y^3$
$= 2xy^2(3 + 4xy)$

$2xy^2$ је НЗД за оба члана.
$6xy^2 = 2xy^2 \cdot 3$ и $8x^2y^3 = 2xy^2 \cdot 4xy$.
провера: $2xy^2(3 + 4xy) = 2xy^2 \cdot 3 + 2xy^2 \cdot 4xy = 6xy^2 + 8x^2y^3$.

Задаци

1. Ослободи се заграда у изразима.

а) $8(x + 7)$ **б)** $3(5 - y)$ **в)** $7(9y - 2)$ **г)** $x(x - 2)$

д) $y(3y + 8)$ **ђ)** $2x(5 - 4x)$ **е)** $2xy(3 - y)$ **ж)** $5x^2(3 - 2x)$

2. Препиши и допуни.

а) $8x + 10 = 2(4x + \square)$ **б)** $6x - 9 = 3(2x - \square)$ **в)** $21x + 14 = 7(3x + \square)$

г) $18x + 27 = 9(\square + 3)$ **д)** $24y + 40 = \square(3y + \square)$ **ђ)** $54 - 42x = \square(9 - \square)$

3. За домаћи рад Андреа је требало да разложи на множиоце неколико израза. Она је направила неколико грешака.

а) $12y - 8 = 4(3y - 4)$

б) $30x + 15 = 5(6x + 3)$

в) $4x - 10 = 4(x - 2{,}5)$

Препиши задатке и исправи њене грешке.

У задацима **4**, **5**, **6**, **7** и **8** разложи изразе на множиоце.

4. **а)** $3x+6$ **б)** $7y-14$ **в)** $8x+24$ **г)** $9y+12$
д) $3x-15$ **ђ)** $16y-12$ **е)** $30x+14$ **ж)** $20-16x$
з) $42+21y$ **и)** $60-45x$ **ј)** $38-19y$ **к)** $144-108x$

5. **а)** x^2+4x **б)** y^2-5y **в)** x^2-10x **г)** $2a^2-4a$
д) x^2+9x **ђ)** $8x-3x^2$ **е)** $10y-2y^2$ **ж)** $16x-12x^2$
з) $14x-7x^2$ **и)** $6x+4x^2$ **ј)** $12y^2-9y$ **к)** $72x^2-54x$

6. **а)** $6\pi+2$ **б)** $24-16\pi$ **в)** $\pi r+2r$ **г)** $\pi r^2+2\pi rh$

7. **а)** $2x+4y+6z$ **б)** $9x^2+6x+3$ **в)** $8a-12b+30c$ **г)** $12x^3+6x^2-3x$

8. **а)** $xy+x^2$ **б)** $2x^2+6xy$ **в)** $8x^2y-4xy$ **г)** $10x^3y^2-15x^3y$
д) $16xy^3-24x^3y$ **ђ)** $24a^2b+16ab$ **е)** $45x^5y-54x^2y$ **ж)** $8x^6y^4-6x^5y^2$

9. Алгебарске разломке можемо упростити разлагањем множиоца од бројиоца и имениоца, а затим скраћивањем заједничких делилаца од бројиоца и имениоца.

На пример,

$$\frac{6x+18}{24} = \frac{6\cdot(x+3)}{6\cdot 4} = \frac{x+3}{4} \qquad \text{и} \qquad \frac{x^2-2x}{xy} = \frac{x\cdot(x-2)}{x\cdot y} = \frac{x-2}{y}$$

Упрости дате разломке.

а) $\frac{4x+2}{10}$ **б)** $\frac{9x-6}{12}$ **в)** $\frac{6x+12}{8}$ **г)** $\frac{24-16y}{20}$

д) $\frac{5a+5b}{5c}$ **ђ)** $\frac{8x-4y}{16z}$ **е)** $\frac{3x+3}{x^2+x}$ **ж)** $\frac{5x}{x^2-5x}$

2.4 Сабирање и одузимање алгебарских разломака

Правила за сабирање и одузимање алгебарских разломака су иста као и правила за сабирање и одузимање бројевних разломака.

Случај 1

Имениоци разломка су једнаки:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$

Слично, $\frac{2x}{7}+\frac{3x}{7}=\frac{5x}{7}$.

Случај 2

Имениоци разломка су различити:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}$$
$$=\frac{11}{12}$$

Морамо да сведемо разломке на исти заједнички именилац (НЗС). У овом случају то је број 12.

Слично, $\frac{2x}{3}+\frac{x}{4}=\frac{8x}{12}+\frac{3x}{12}$
$$=\frac{11x}{12}$$

Пример

Запиши следеће изразе као један разломак.

а) $\frac{9}{y}-\frac{2}{y}$ б) $\frac{5x}{4}-\frac{2x}{5}$ в) $\frac{2}{3x}+\frac{1}{6x}$ г) $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}$

а) $\frac{9}{y}-\frac{2}{y}=\frac{7}{y}$ Имениоци су једнаки.

б) $\frac{5x}{4}-\frac{2x}{5}=\frac{25x}{20}-\frac{8x}{20}$
$$=\frac{17x}{20}$$
Морамо да сведемо разломке на исти именилац, што је у овом случају 20.

в) $\frac{2}{3x}+\frac{1}{6x}=\frac{4}{6x}+\frac{1}{6x}$
$$=\frac{5}{6x}$$
Морамо да сведемо разломке на исти именилац, што је у овом случају $6x$.

г) $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3y}{xy}+\frac{2x}{xy}$
$$=\frac{3y+2x}{xy}$$
Морамо да сведемо разломке на исти именилац, што је у овом случају xy.

Задаци

1. Запиши следеће изразе као један разломак.

а) $\frac{x}{3}+\frac{x}{3}$ б) $\frac{2x}{5}+\frac{x}{5}$ в) $\frac{x}{7}+\frac{3x}{7}$ г) $\frac{x}{5}+\frac{1}{5}$ д) $\frac{2x}{9}+\frac{2x}{9}$

ђ) $\frac{x}{8}-\frac{y}{8}$ е) $\frac{5x}{7}-\frac{2x}{7}$ ж) $\frac{x}{7}-\frac{2}{7}$ з) $\frac{5}{x}+\frac{2}{x}$ и) $\frac{7}{y}-\frac{3}{y}$

ј) $\frac{x}{y}+\frac{2}{y}$ к) $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}$ л) $\frac{x}{4}+\frac{x}{4}$ љ) $\frac{5x}{6}-\frac{x}{6}$ м) $\frac{8}{9xy}-\frac{2}{9xy}$

2. Теодора је записала:

$\frac{x}{8}+\frac{2x}{3}=\frac{3x}{11}$

Објасни где је погрешила и израчунај тачно решење.

3. Запиши следеће изразе као један разломак.

а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}$ б) $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}$ в) $\frac{y}{3}-\frac{y}{4}$ г) $\frac{x}{2}+\frac{x}{8}$ д) $\frac{2x}{5}+\frac{x}{10}$

ђ) $\frac{5x}{8}-\frac{x}{2}$ е) $\frac{2x}{5}-\frac{x}{4}$ ж) $\frac{5y}{7}-\frac{y}{2}$ з) $\frac{3x}{8}+\frac{x}{3}$ и) $\frac{2y}{3}+\frac{y}{6}$

4. Одреди израз који се разликује од осталих.

$\frac{x}{6}+\frac{5x}{12}$ $\frac{5x}{6}-\frac{x}{4}$ $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}$ $\frac{x}{6}+\frac{3x}{4}$ $\frac{2x}{3}-\frac{x}{12}$

Изрази у задацима **5**, **6** и **7** запиши као један разломак.

5. а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$ б) $\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}+\frac{x}{4}$ в) $\frac{x}{2}+\frac{x}{10}+\frac{2x}{5}$ г) $\frac{5x}{6}+\frac{x}{4}-\frac{2x}{3}$

6. а) $\frac{1}{2x}+\frac{3}{x}$ б) $\frac{2}{3y}+\frac{1}{y}$ в) $\frac{3}{4x}+\frac{1}{2x}$ г) $\frac{3}{xy}+\frac{2}{y}$

7. а) $\frac{x}{4}+\frac{x+1}{2}$ б) $\frac{x+2}{3}+\frac{x+7}{4}$ в) $\frac{x-8}{4}+\frac{x+2}{5}$ г) $\frac{x-4}{3}-\frac{x-5}{7}$

2.5 Решавање линеарних једначина

Да се подсетимо како се решавају **једначине**.

Пример 1

Реши једначину: $\frac{x}{2}-4=12$

$\frac{x}{2}-4=12$ Додајемо 4 на обе стране.

$\frac{x}{2}=16$ Обе стране множимо са 2.

$x=32$

Пример 2

Реши једначину: $3(2x+5)=2(2x-7)+25$

$3(2x+5)=2(2x-7)+25$ Ослобађамо се заграда.

$6x+15=4x-14+25$ Сабирамо сличне чланове.

$6x+15=4x+11$ Одузимамо $4x$ са обе стране.

$2x+15=11$ Одузимамо 15 са обе стране.

$2x=-4$ Обе стране делимо са 2.

$x=-2$

Да бисмо решили једначину $\frac{x+1}{4}=\frac{x+8}{5}$, прво морамо помножити стране једначине најмањим заједничким садржаоцем (НЗС) од 4 и 5, односно помножити са 20.

$20 \cdot \frac{(x+1)}{4} = 20 \cdot \frac{(x+8)}{5}$ Скраћујемо $20 : 4 = 5$ и $20 : 5 = 4$

$5(x+1) = 4(x+8)$ Ослобађамо се заграда.

$5x + 5 = 4x + 32$ Одузимамо $4x$ са обе стране.

$x + 5 = 32$ Одузимамо 5 са обе стране.

$x = 27$

Ако се на обе стране једначине налази по један разломак, онда можемо да користимо бржи начин.

$\frac{x+1}{4}=\frac{x+8}{5}$ Множимо унакрсно.

$5(x+1) = 4(x+8)$ Ослобађамо се заграда.

$5x + 5 = 4x + 32$ Одузимамо 4 са обе стране.

$x + 5 = 32$ Одузимамо 5 са обе стране.

$x = 27$

Задаци

1. Реши једначине.

а) $3x + 2 = 23$ **б)** $2x - 1 = -9$ **в)** $5x - 3 = 27$ **г)** $4x + 7 = 17$

д) $\frac{x+2}{5} = 4$ **ђ)** $\frac{2x-3}{4} = -2$ **е)** $\frac{x}{3} - 2 = 2$ **ж)** $\frac{x}{5} + 6 = -2$

з) $15 - 2x = 9$ **и)** $30 - 4x = 24$ **ј)** $3(2x - 7) = -27$ **к)** $2(5 - 2x) = 16$

2. Реши једначине.

а) $2(x + 3) + 4(2x - 1) = 22$ **б)** $3(2x - 2) + 5(x + 6) = 13$

в) $4(3x + 2) - 3(2x - 1) = 35$ **г)** $5(2x - 3) - 2(3x + 5) = -23$

д) $5x + 4 = 4x + 7$ **ђ)** $7x - 2 = 5x + 5$

е) $8x + 1 = 5x - 8$ **ж)** $2x - 5 = 7 - x$

з) $3(x + 1) = 2x - 8$ **и)** $2 + 4(x - 3) = 2x + 7$

ј) $12 - 2x = 20 - 5x$ **к)** $3(2x + 7) + 2 = 4(x - 8)$

3. Реши једначине.

а) $\frac{2x-5}{2}=\frac{x+1}{8}$ **б)** $\frac{x-1}{2}=\frac{2x+10}{12}$ **в)** $\frac{4x+7}{3}=\frac{8x+9}{5}$ **г)** $\frac{2x+2}{6}=\frac{x+5}{5}$

д) $\frac{3x-2}{7}=\frac{x-2}{3}$ **ђ)** $\frac{4x-3}{9}=\frac{3x-4}{5}$ **е)** $\frac{2x+1}{2}=\frac{5x+7}{4}$ **ж)** $\frac{3x-8}{6}=\frac{x-2}{3}$

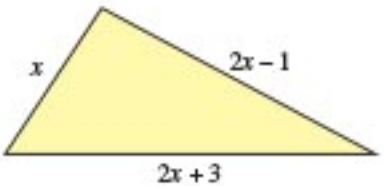
4. Амир је замислио број.

Додао му је 5 а затим га поделио са 7.

Исти резултат се добија ако одузмемо 1 од замишљеног броја а затим поделимо са 4.

Који је број замислио Амир?

5. Обим датог троугла је 15 cm.



а) Запиши једначину која садржи x за израчунавање обима у троуглу.

б) Реши једначину под **а)** да нађеш вредност од x.

6. Израз А је за 7 мањи од израза Б.

Израчунај вредности x.

А $25-2x$ Б $3(x+4)$

7. Реши једначине.

а) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=14$ **б)** $\frac{2x}{3}-\frac{x}{5}=21$ **в)** $\frac{6x}{7}-\frac{x}{3}=22$ **г)** $\frac{2x}{9}-\frac{x}{2}=10$

2.6 Састављање алгебарских израза

Пример 1

Запиши израз којим ћеш израчунати површину правоугаоника.



Површина = основа · одговарајућа висина

$= (x+8)(x-3)$

$= x^2-3x+8x-24$

$= x^2+5x-24$

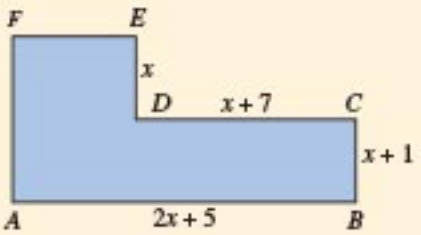
Пример 2

Према подацима на цртежу, запиши израз којим ћеш израчунати.

а) дужину странице EF

б) дужину странице AF

в) обим фигуре $ABCDEF$.



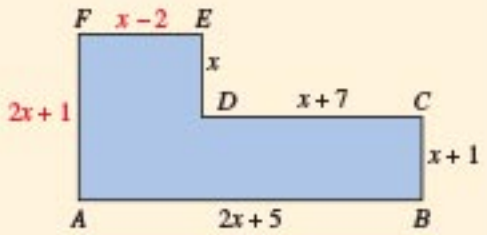
а) $\overline{EF}=\overline{AB}-\overline{DC}=(2x+5)-(x+7)$

$= 2x+5-x-7$

$= x-2$

б) $\overline{AF}=\overline{BC}+\overline{DE}=x+1+x$

$= 2x+1$



в) обим $=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}$

$= (2x+5)+(x+1)+(x+7)+x+(x-2)+(2x+1)$

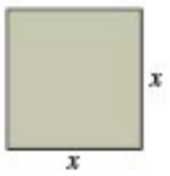
$= 8x+12$

Задаци

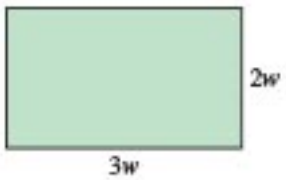
1. Према подацима на цртежу, запиши изразе за обим за сваку 2Д-форму.

Упрости добијене изразе.

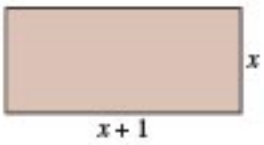
а)



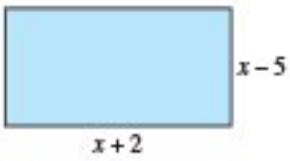
б)



в)



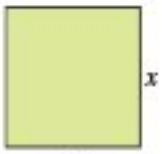
г)



2. Запиши изразе за површину сваке 2Д-форме из задатка **1**.

Упрости добијене изразе.

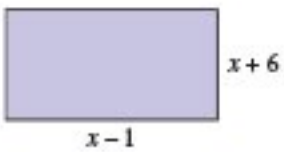
3.

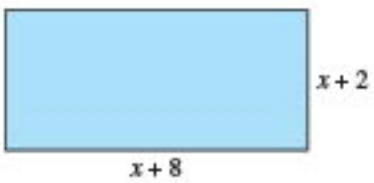




Квадрат и правоугаоник имају једнаке површине. Израчунај вредност за x.

4.





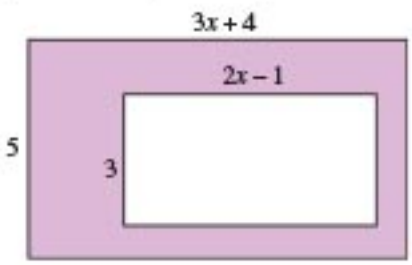
Запиши израз којим се израчунава укупна површина оба правоугаоника.

Упрости добијени израз.

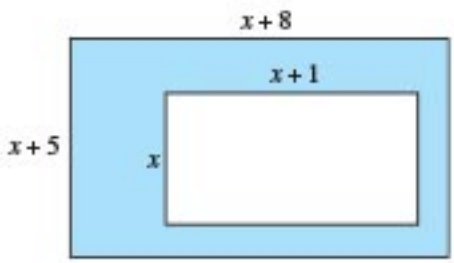
5. Запиши израз за израчунавање површине дате 2Д-форме.

Упрости добијени израз.

а)



б)



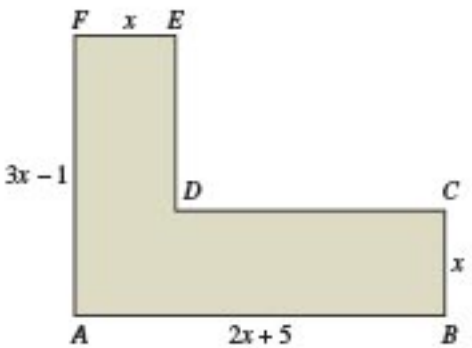
6. Према подацима на цртежу, запиши израз за израчунавање:

а) дужине DC

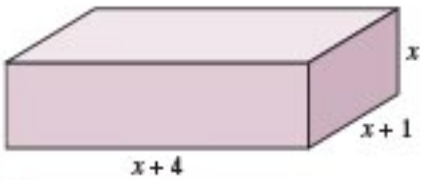
б) дужине DE

в) обима $ABCDEF$

г) површина 2Д-форме $ABCDEF$.



7.



Према подацима на цртежу, запиши израз за израчунавање површине датог квадра. Упрости добијени израз.

8. **а)** Елена вози бицикл x km са средњом брзином од 20 km/h.

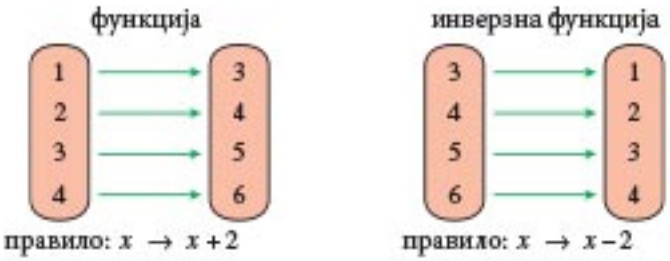
Запиши израз, користећи x, за време које је потребно Елени да пређе цео пут истом брзином.

б) Елена затим вози још $2x$ km средњом брзином од 30 km/h.

Запиши израз користећи x за укупно време у сатима, које је потребно Елени да би завршила обе етапе путовања и покажи да се то време упрошћује до $\frac{7x}{60}$.

2.7 Инверзна функција

На дијаграмима је приказана функција „додајемо 2“ и њена **инверзна функција** „одузимамо 2“.



Инверзна функција је функција која примењује инверзне операције операцијама у оригиналној функцији.

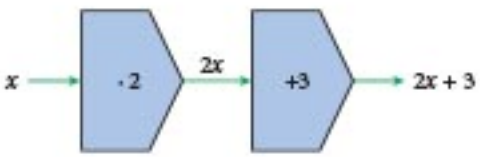
Слично, инверзна функцији $x \to 3x$ је функција $x \to \frac{x}{3}$

То може да се запише на следећи начин:

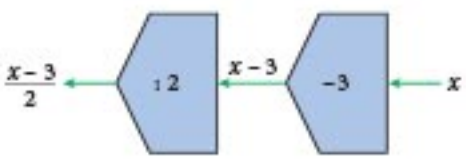
Инверзна функцији $y = 3x$ је функција $y = \frac{x}{3}$

Можемо да нађемо инверзну функцију било које функције коришћењем инверзне функционалне машине.

Функционална машина за функцију $x \to 2x + 3$ је:

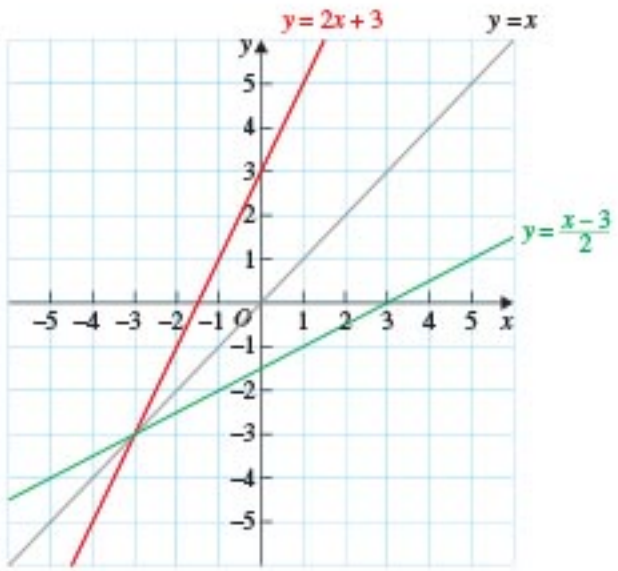


Инверзна функционална машина је:



Према томе, инверзна функција функције $x \to 2x + 3$ је функција $x \to \frac{x-3}{2}$.

Ако нацртамо графике функције $y = 2x + 3$ и њене инверзне функције $y = \frac{x-3}{2}$ у истом координатном систему, видећемо посебну везу.

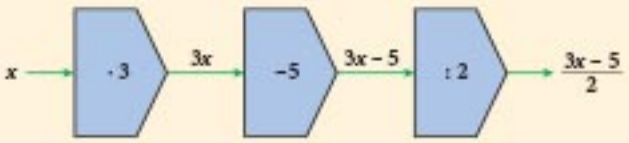


Графици функције и њене инверзне функције су симетричне праве једна на другу у односу на праву $y = x$.

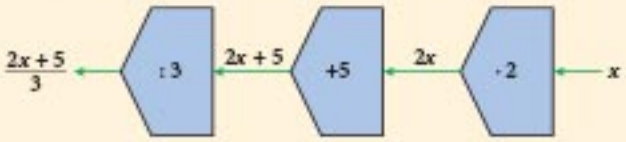
Пример 1

Одреди инверзну функцију функције $x \to \frac{3x-5}{2}$

Функционална машина за функцију је:



Инверзна функционална машина је:



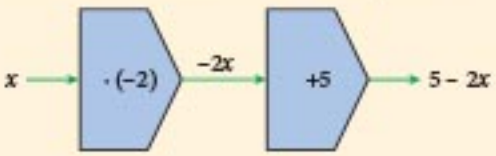
Према томе инверзна функција је $x \to \frac{2x+5}{3}$

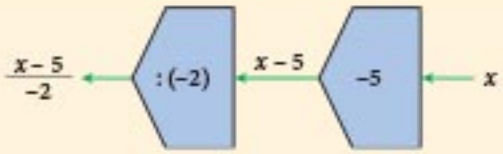
Пример 2

Одреди инверзну функцију функције: $x \to 5 - 2x$

Прво записујемо функцију као $x \to -2x + 5$

Правило функције је „множимо са -2“, а затим „додајемо 5“.





Према томе, инверзна функција је $x \to \frac{x-5}{-2}$, коју можемо да упростимо до $x \to \frac{5-x}{2}$

Задаци

1. Запиши инверзну функцију сваке од функција.

а) $x \to 2x$ **б)** $x \to x+3$ **в)** $x \to x-6$ **г)** $x \to \frac{x}{5}$

2. Функционалном машином нађи инверзну функцију сваке од функција.

а) $x \to 3x+1$ **б)** $x \to 5x-3$ **в)** $x \to 4x+3$ **г)** $x \to 7x-1$

д) $x \to 2(x+3)$ **ђ)** $x \to 4(x-7)$ **е)** $x \to \frac{x+2}{4}$ **ж)** $x \to \frac{x-8}{3}$

з) $x \to \frac{x}{4}-2$ **и)** $x \to \frac{x}{6}+5$ **ј)** $x \to \frac{3x+1}{2}$ **к)** $x \to \frac{2x-3}{5}$

л) $x \to 5(2x-1)$ **љ)** $x \to \frac{2x}{3}+1$ **м)** $x \to \frac{4x+7}{2}$ **н)** $x \to \frac{3x-4}{7}$

3. Одреди инверзну сваке од функција.

а) $x \to 7-x$ **б)** $x \to 8-2x$ **в)** $x \to 15-3x$ **г)** $x \to \frac{3-2x}{4}$

4. Марко је добио задатак да нађе инверзну функцију за функцију $x \to 2x-5$

Он је написао:

Ако пратим следеће кораке, нађи ћу инверзну функцију:

Корак 1 Запиши функцију као: $y = 2x - 5$

Корак 2 Замени места x и y $x = 2y - 5$

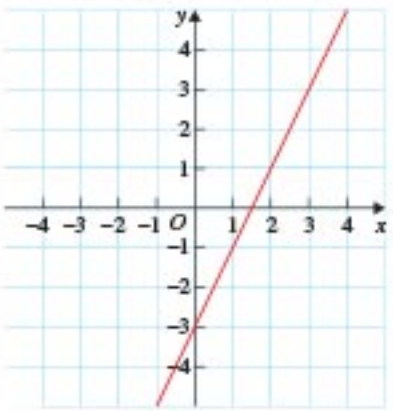
Корак 3 Изрази y: $y = \frac{x+5}{2}$

Корак 4 Запиши инверзну функцију: $x \to \frac{x+5}{2}$

Користи овај метод да нађеш инверзну функцију датих функција:

а) $x \to 2x-9$ **б)** $x \to 4x+2$ **в)** $x \to \frac{2x-1}{4}$ **г)** $x \to \frac{3-2x}{5}$

5. Прецртај график и доцртај график инверзне функције за дату функцију.

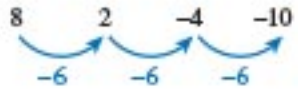


2.8 Правило за одређивање следећег члана у низу

Низ је листа бројева или облика који су повезани по одређеном правилу.

8, 2, −4, −10, ... је линеаран низ.

Називамо га **линеарни низ** (или **аритметички низ**) зато што је разлика између било која два суседна члана иста.



Правило одређивања следећег члана у низу је „−6" или „одузимамо 6".

Низ 3, 6, 11, 18, 27, назива се **нелинеарни низ** зато што разлика између било која два суседна члана није иста.



Разлике између суседних чланова формирају нови бројевни низ.

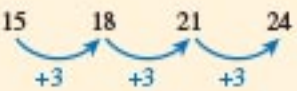
Можемо да користимо низ разлика да бисмо одредили следеће чланове у низу.



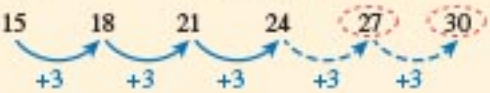
Пример 1

15, 18, 21, 24, …

Запиши: **а)** правило одређивања следећег члана **б)** следећа два члана у низу

а) 

Правило низа је „додајемо 3"

б) 

Следећа 2 члана у низу су 27 и 30.

Пример 2

12, 17, 25, 36, 50, …

Запиши следећа 2 члана у низу.

Погледајмо најпре бројевну шему разлика, а затим искористимо шему да бисмо записали следећа два члана.



Следећа два члана у низу су 67 и 87.

Задаци

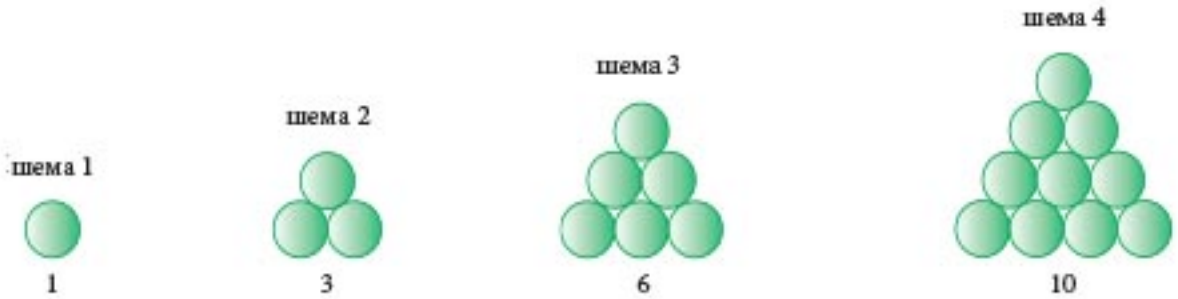
1. За сваки низ запиши: **I** правило одређивања следећег члана у низу
II следећа три члана

а) 3, 5, 7, 9, …
б) 7, 11, 15, 19, …
в) 1, 6, 11, 16, …
г) 7; 8,5; 10; 11,5; …
д) 16, 13, 10, 7, …
ђ) 5, −4, −13, −22, …
е) 1, 3, 9, 27, …
ж) 1, 10, 100, 1000, …
з) 32, 16, 8, 4, …

2. Уочи разлике суседних чланова у сваком од низова и запиши следећа три члана.

а) 1, 2, 4, 7, 11, …
б) 5, 6, 9, 14, 21, …
в) 2, 5, 11, 20, 32, …
г) 4, 9, 19, 34, 54, …
д) 20, 19, 17, 14, 10, …
ђ) −4, −2, 2, 8, 16, …

3. Цртежи доле приказују како се формирају прва четири троугаона броја.



а) Запиши следећа три троугаона броја.

б) Препиши и допуни следећу табелу.

Шема	1	2	3	4	5	6	7
Број кругова	$1=\frac{1\cdot 2}{2}$	$3=\frac{2\cdot 3}{2}$	$6=\frac{3\cdot 4}{2}$	$10=\frac{4\cdot 5}{2}$			

в) Искористи шему из табеле под **б)** да запишеш формулу за n-ти троугаони број.

г) Искористи решење под **в)** да запишеш стоти троугаони број.

4. Низ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... назива се Фибоначијев низ.

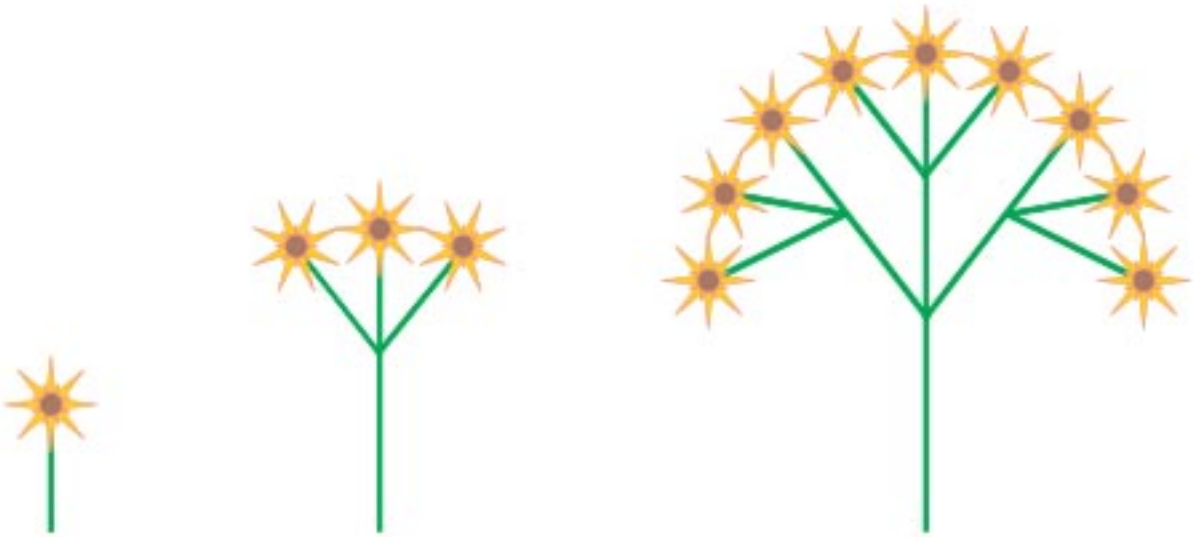
Сваки члан Фибоначијевог низа, осим прва два, је збир два претходна члана у низу.

Запиши следећа три члана сваког од следећих низова истим правилом као што је Фибоначијево.

а) 5, 7, 12, 19, 31, …
б) 2, 2, 4, 6, 10, 16, …
в) 3, −4, −1, −5, −6, …

5. На цртежу је приказан раст једне биљке током три године.

Сваке године цвет се мења у три нове стабљике и три нова цвета.



година 1 година 2 година 3

Препиши и допуни табелу.

Година	1	2	3	4	5
Број цветова	1	3	9		
Број стабљика	1	4			

6. На цртежу је приказан бројевни низ:



цртеж 1 цртеж 2 цртеж 3 цртеж 4

На цртежима можемо видети како је формиран низ:

цртеж 1: $1 = 1 = 1^2$

цртеж 2: $1 + 3 = 4 = 2^2$

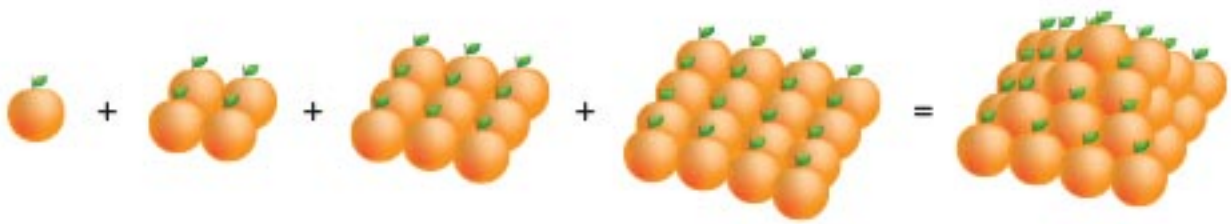
цртеж 3: $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

цртеж 4: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

а) Запиши следећа два реда овог бројевног низа.

б) Користи бројевне шеме да одредиш збир првих 20 непарних бројева.

7. На цртежу је приказано како се формира пирамида од поморанџи.



Ова пирамида има четири нивоа. Број поморанџи у пирамиди = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.

а) Колико поморанџи има у пирамиди са три нивоа?

б) Колико поморанџи има у пирамиди са пет нивоа?

в) Колико поморанџи има у пирамиди са шест нивоа?

8. Дат је низ: 83, 39, 42, 23, ...

Правило налажења следећег члана у низу је „помножи цифре последњег броја и затим додај 15".

а) Запиши првих десет чланова у низу.

б) Који је педесети члан низа?

9. Дат је следећи низ:

ред 1: $1^3 = 1 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$

ред 2: $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = \left(\frac{2 \cdot 3}{2}\right)^2$

ред 3: $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)^2$

ред 4: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = \left(\frac{4 \cdot 5}{2}\right)^2$

а) Запиши следећа два реда овог бројевног низа.

б) Запиши формулу за збир првих n кубних бројева.

10. Марко проучава Фибоначијев низ: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Он је разматрао количнике суседних чланова.

Сваки такав количник је записао у облику $1 : n$.

Количник првог и другог броја је 1 : 1

Количник другог и трећег броја је 1 : 2

Количник трећег и четвртог броја је 2 : 3 = 1 : 1,5

Количник четвртог и петог броја је 3 : 5 = 1 : 1,666...

а) Одреди следећих шест количника и кажи шта формирају ти бројеви.

б) На интернету потражи више информација о овом „златном количнику" или како се још назива „златној размери".

11.



цртеж 1



цртеж 2



цртеж 3



цртеж 4

На цртежима су приказана прва четири корака у цртању Кохове пахуљице.

Кохова пахуљица је фрактална шема.

а) На интернету потражи више информација о Серпинскијевом троуглу.

Нацртај прва четири цртежа о Серпинскијевом троуглу.

б) Помоћу интернета проучи и друге фракталне шеме.

2.9 Правило и одређивање n-тог члана у низу.

Да бисмо одредили бројеве у једном низу, можемо да користимо и **правило одређивања n-тог члана у низу.**

Ако је ово правило низа : члан = 3 · редни број члана, па додамо 5, прва четири члана тада су:

члан 1 $= 3 \cdot 1 + 5 = 3 + 5 = 8$

члан 2 $= 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$

члан 3 $= 3 \cdot 3 + 5 = 9 + 5 = 14$

члан 4 $= 3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$

Правило се може записати и формулом: n-ти члан = $3n + 5$.

Пример 1

Правило одређивања n-тог члана у низу је: n-ти члан = $7n - 2$.

а) Запиши прве чланове у низу.

б) Који члан низа има вредност 327?

а) члан 1 $= 7 \cdot 1 - 2 = 7 - 2 = 5$

члан 2 $= 7 \cdot 2 - 2 = 14 - 2 = 12$

члан 3 $= 7 \cdot 3 - 2 = 21 - 2 = 19$

члан 4 $= 7 \cdot 4 - 2 = 28 - 2 = 26$

Прва четири члана су: 5, 12, 19, 26

б) Решићемо једначину: $7n - 2 = 327$

$7n = 329$ Додајемо 2 на обе стране.

$n = 47$ Обе стране делимо са 7.

четрдесет седми члан има вредност 327.

Пример 2

Правило за одређивање n-тог члана у низу је: n-ти члан = $2n^2 + 5$.

Запиши прва четири члана у низу.

члан $1 = 2 \cdot 1^2 + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$

члан $2 = 2 \cdot 2^2 + 5 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$

члан $3 = 2 \cdot 3^2 + 5 = 2 \cdot 9 + 5 = 23$

члан $4 = 2 \cdot 4^2 + 5 = 2 \cdot 16 + 5 = 37$

Прва четири члана су: 7, 13, 23 и 37.

Задаци

1. Запиши прва четири члана линеарног низа чији је n-ти члан:

а) $n + 2$ **б)** $3n - 1$ **в)** $5n + 3$ **г)** $2n + 5$

д) $4n - 3$ **ђ)** $40 - n$ **е)** $80 - 5n$ **ж)** $5 - 3n$

з) $0{,}5n + 3$ **и)** $12 - 0{,}5n$ **ј)** $\frac{2n - 7}{2}$ **к)** $\frac{6 - 5n}{4}$

2. Запиши првих пет чланова нелинеарног низа чији је n-ти члан:

а) n^2 **б)** $n^2 + 2$ **в)** $n^2 - 1$ **г)** $3n^2$

д) $n(n + 1)$ **ђ)** $n^2 - 3n$ **е)** n^3 **ж)** $n^3 + 1$

з) $2n^3$ **и)** $n(n+ 1)(n + 2)$ **ј)** $\frac{n}{n + 1}$ **к)** $\frac{n + 5}{2n}$

3. Дат је низ са n-тим чланом $= 6n + 3$.
Који члан у низу има вредност 405?

4. Дат је низ са n-тим чланом $= 2n - 7$.
Који члан у низу има вредност 301?

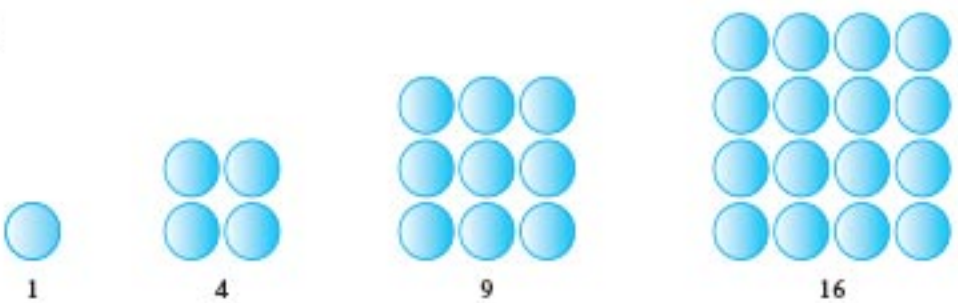
5. Дат је низ са n-тим чланом $= 10 - 4n$.
Који члан у низу има вредност -258?

6. Дат је низ са n-тим чланом $= \frac{5n + 3}{2}$.
Који члан у низу има вредност 374?

7. Дат је низ са n-тим чланом $= n^2 + 4$.
Који члан у низу има вредност 488?

8. Дат је низ са n-тим чланом $= 2^n + 4$.
Који члан у низу има вредност 511?

9.



Низ цртежа представља прва четири члана у низу потпуних квадрата.

Правило о налажењу n-тог члана у низу потпуних квадрата је: n-ти члан = n^2.

Сваки од датих низова повезан је са низом потпуних квадрата.

Пронађи везу и затим запиши правило за израчунавање n-тог члана у низу.

Први пример је решен.

а) 4, 7, 12, 19, …

потпуни квадрати: 1 4 9 16

правило...додајемо 3^{α}.

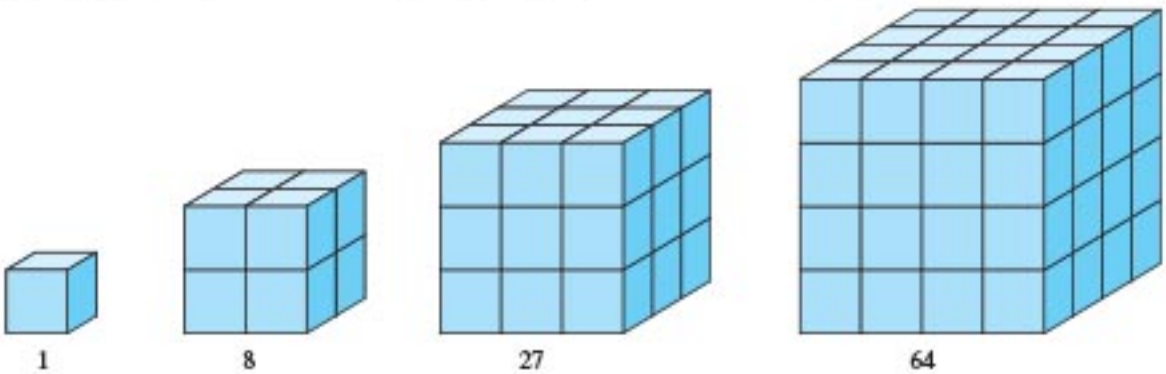
низ: 4 7 12 19

Према томе, правило је: n-ти члан = $n^2 + 3$.

б) 2, 5, 10, 17, … **в)** 0, 3, 8, 15, … **г)** 7, 10, 15, 22, …

д) 3, 6, 11, 18, … **ђ)** 2, 8, 18, 32, … **е)** 1, 7, 17, 31, …

10.



Низ цртежа представља прва четири члана у низу потпуних кубова.

Правило одређивања n-тог члана низа потпуних кубова је: n-ти члан = n^3.

Сваки од датих низова је повезан са низом потпуних кубова.

Нађи везу, а затим запиши правило за израчунавање n-тог члана низа.

а) 2, 9, 28, 65, … **б)** 0, 7, 26, 63, … **в)** 6, 13, 32, 69, …

г) 4, 11, 30, 67, … **д)** 2, 16, 54, 128, … **ђ)** 3, 17, 55, 129, …

11. Низ 2, 4, 8, 16,... је формиран на следећи начин.

$2^1 = 2$ $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Према томе, правило n-тог члана низа = n-ти члан = 2^n.

Сваки од датих низова је повезан са низом 2, 4, 8, 16,...

Нађи везу а затим запиши правило за израчунавање n-тог члана у низу.

а) 3, 5, 9, 17, … **б)** 0, 2, 6, 14, … **в)** 4, 6, 10, 18, …

г) 1, 3, 7, 15, … **д)** 6, 12, 24, 48, … **ђ)** 7, 13, 25, 49, …

2.10 *n*-ти члан аритметичког низа

Када радимо са бројевним низовима често се тражи да нађемо вредност одређеног члана у низу.

На пример, да нађемо четрдесети члан у низу: 3, 10, 17, 24, 31, ...

Записивање свих чланова у низу све док не дођемо до траженог броја није најбољи метод решавања.

Најбољи начин је да користимо правило *n*-тог члана у низу.

Правило ***n*-тог члана у низу** често записујемо алгебарски, формулом за израчунавање ***n*-тог члана.**

Да бисмо одредили ово правило, прво треба да уочимо разлике међу суседним члановима низа.

Редни број, *n*	1	2	3	4	5
Члан	3	10	17	24	31

+7 +7 +7 +7

У овом случају, чланови се повећавају за 7.

Бројеви у таблици множења са 7 такође се увећавају за 7.

Да би пронашли остатак правила, морамо упоредити све чланове са таблицом множења са 7.

Редни број, *n*	1	2	3	4	5	·7
Таблица множења са 7	7	14	21	28	35	−4
Члан	3	10	17	24	31	

Правило за *n*-ти члан је:

Члан 7 = редни број члана, и затим одузимамо 4.

Алгебарски, то може да се напише овако:

n-ти члан = $7n - 4$.

Према томе, четрдесети члан овог низа одређује се заменом $n = 40$ у формули.

$$40\text{-ти члан} = 7 \cdot 40 - 4$$
$$= 280 - 4$$
$$= 276$$

Пример

Одреди *n*-ти члан и педесети члан линеарног низа 37, 33, 29, 21, ...

37 33 29 25 21

−4 −4 −4 −4

Чланови се умањују за 4. Зато упореди чланове са таблицом множења за – 4.

Редни број, *n*	1	2	3	4	5	·(−4)
Таблица множења са −4	−4	−8	−12	−16	−20	+41
Члан	37	33	29	25	21	

Правило је:

Члан = -4 · редни број члана, и затим додамо 41.

Према томе општи члан = $-4n + 41 = 41 - 4n$.

Педесети члан $= 41 - 4 \cdot 50$

$= 41 - 200$

$= -159$

Задаци

1. Одреди: **I** n-ти члан **II** педесети члан растућих аритметичких низова.

Прикажи свој рад табелом. (Задатак под **а)** је решен као пример.)

а) 3, 7, 11, 15, …

Редни број, n	1	2	3	4	50	n
Члан	3	7	11	15	199	$4n - 1$

· 4 и одузми 1

+4 +4 +4

б) 2, 5, 8, 11, …

в) 2, 9, 16, 23, …

г) 9, 14, 19, 24, …

д) 1, 3, 5, 7, …

ђ) 5, 16, 27, 38, …

е) 10, 18, 26, 34, …

ж) -2, 4, 10, 16, …

з) 3, 7, 11, 15, …

и) -12, -5, 2, 9, …

2. Одреди: **I** n-ти члан **II** тридесети члан опадајућих аритметичких низова.

Прикажи твој рад табелом. (Задатак под **а)** је решен као пример.)

а) 5, 2, -1, -4, …

Редни број, n	1	2	3	4	30	n
Члан	5	2	-1	-4	-82	$8 - 3n$

· (−3) и додај 8

−3 −3 −3

б) 30, 27, 24, 21, …

в) 56, 51, 46, 41, …

г) 88, 77, 66, 55, …

д) 40, 34, 28, 22, …

ђ) 13, 9, 5, 1, …

е) 15, 7, -1, -9, …

ж) 7, 5, 3, 1, …

з) -2, -7, -12, -17, …

и) 3, -7, -17, -27, …

3. Фатима је имала задатак да нађе n-ти члан у низу: -11, -4, 3, 10, …

Она је записала:

-11 -4 3 10

+7 +7 +7

Ако наставим низ уназад, онда ће број испред првог члана бити − 18.

-18 -11 -4 3 10

+7 +7 +7 +7

Према томе, n-ти члан = 7n − 18.

а) Препиши и допуни следеће провере да покажеш да је n-ти члан у низу: $-11, -4, 3, 10, \ldots$ је $7n - 18$.

први члан $= 7 \cdot 1 - 18 = -11$ други члан $= 7 \cdot 2 - 18 = \ldots$

трећи члан $= 7 \cdot 3 - 18 = \ldots$ четврти члан $= 7 \cdot 4 - 18 = \ldots$

б) Искористи начин решавања из задатка са Фатимом да нађеш n-ти члан следећих линеарних низова.

i 6, 13, 20, 27, … **ii** 9, 20, 31, 42, … **iii** 40, 42, 44, 46, …

iv 33, 37, 41, 45, … **v** 8, 3, −2, −7, … **vi** 83, 76, 69, 62, …

4. Дати цртежи се састоје од крстића.



цртеж 1 цртеж 2 цртеж 3

а) Одреди број крстића потребних да би се направио:

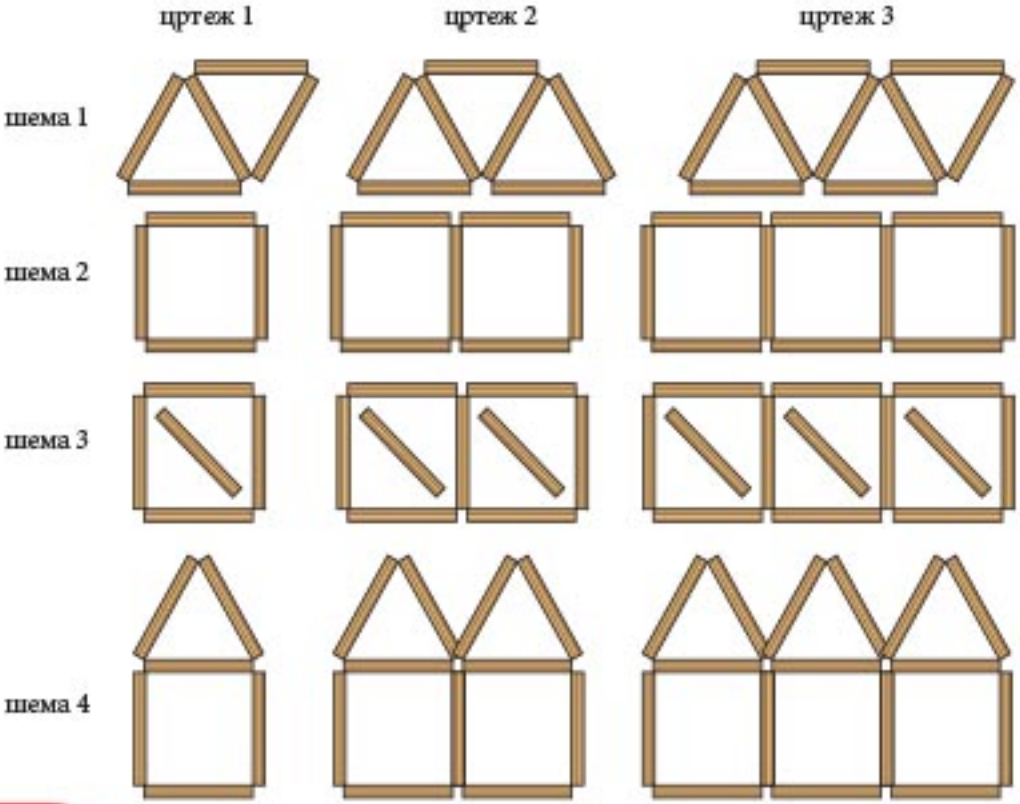
i цртеж 4 **ii** цртеж 5 **iii** цртеж 6.

б) Препиши и допуни табелу према шеми.

Цртеж	1	2	3	4	5	6
Број крстића	4	7				

в) Запиши правило налажења крстића на цртежу n.

5. Цртежи приказују четири различите шеме формиране од шибица.



а) Нацртај цртеж 4 за сваку шему.

б) Препиши и допуни табелу за сваку шему.

Цртеж	1	2	3	4
Број шибица				

в) Запиши правило налажења броја шибица на цртежу n на свакој шеми.

Задаци за понављање

1. Упрости:

а) $7x \cdot x$ **б)** $5a \cdot 2b \cdot 3a$ **в)** $2xy \cdot 3x \cdot 5xy \cdot x$

2. Упрости:

а) $\frac{9x}{12}$ **б)** $\frac{3xy}{x^2}$ **в)** $\frac{6x}{10y}$ **г)** $\frac{4a^2b}{6ab^2}$

3. Реши једначину: $2^x = 32$

4. Упрости:

а) $x^4 \cdot x^5$ **б)** $2y^3 \cdot 5y$ **в)** $8a^4 \cdot 3a^7$ **г)** $y^4 \cdot y \cdot y^8$

д) $x^9 : x^3$ **ђ)** $\frac{35x^8}{40x^2}$ **е)** $\frac{x^{15}}{x^4 \cdot x^2}$ **ж)** $(x^5)^4$

5. Разложи на множиоце изразе.

а) $20x + 16$ **б)** $y^2 - 4y$ **в)** $3x^2 - 6x$ **г)** $6x + 4y + 8z$

6. Израчунај и упрости:

а) $\frac{x}{5} + \frac{x}{5}$ **б)** $\frac{x}{6} + \frac{x}{3}$ **в)** $\frac{7x}{10} - \frac{x}{4}$ **г)** $\frac{5}{3x} + \frac{1}{3x}$

7. Реши једначине.

а) $3x = 12$ **б)** $x + 5 = 16$ **в)** $3x - 4 = 11$

г) $5x + 4 = 6 + 3x$ **д)** $\frac{x+1}{4} = 5$ **ђ)** $\frac{7-2x}{2} = 5$

е) $\frac{x}{4} + 8 = 2$ **ж)** $3(2x - 7) = 4x + 3$ **з)** $\frac{15+x}{2} = 7 - x$

и) $\frac{x+5}{2} = \frac{x-4}{3}$ **ј)** $5(3x - 2) - 2(3x - 4) = 13$

8. Одреди инверзне функције функцијама.

а) $x \to 5x$ **б)** $x \to x - 8$ **в)** $x \to 6x - 4$ **г)** $x \to \frac{3x-5}{2}$

9. Запиши следећа три члана сваком од следећих низова:

а) 13, 19, 25, 31, … **б)** −14, −11, −8, −5, … **в)** 7, 14, 28, 56, …

г) 7, 5, 3, 1, … **д)** 400, 200, 100, 50, … **ђ)** 3, 6, 11, 18, 27, …

е) −7, −5, −1, 5, 13, … **ж)** 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, … **з)** 16, 8, 4, 2, 1, …

и) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$ **ј)** $\frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \ldots$ **к)** $5a^5, 8a^7, 11a^9, 14a^{11}, \ldots$

10. Запиши прва четири члана у низу чији је n-ти члан:

а) $n+3$ **б)** $2n-1$ **в)** $4n+3$ **г)** $4n-5$

д) $23-2n$ **ђ)** $15-4n$ **е)** n^2+1 **ж)** n^2-2

з) $2n^2$ **и)** $n(n+1)$ **ј)** n^2+5n **к)** n^3+2

11. Дата је једна бројевна шема.

ред 1: $2 = 2 = 1^2+1$

ред 2: $2+4 = 6 = 2^2+2$

ред 3: $2+4+6 = 12 = 3^2+3$

ред 4: $2+4+6+8 = 20 = 4^2+4$

а) Запиши следећа два реда у низу.

б) Запиши формулу за збир бројева у реду n.

12. Низ 3, 9, 27, 81, ... је формиран на следећи начин.

$3^1=3 \quad 3^2=3\cdot 3=9 \quad 3^3=3\cdot 3\cdot 3=27 \quad 3^4=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$

Према томе, општи члан низа је: n-ти члан $=3^n$.

Сваки од следећих низова је повезан са низом 3, 9, 27, 81, ...

Одреди везу и затим запиши правило n-тог члана низа.

а) 4, 10, 28, 82, … **б)** 7, 13, 31, 85, … **в)** 1, 7, 25, 79, …

г) 2, 8, 26, 80 **д)** 6, 18, 54, 162, … **ђ)** 7, 20, 57, 166, …

13.



цртеж 1 цртеж 2 цртеж 3 цртеж 4

На цртежима је приказано како се формира следећи бројевни низ:

цртеж 1: $1 = 1 = 1^2$

цртеж 2: $1+2+1 = 4 = 2^2$

цртеж 3: $1+2+3+2+1 = 9 = 3^2$

цртеж 4: $1+2+3+4+3+2+1 = 16 = 4^2$

а) Запиши следећа два реда у низу.

б) Користи бројевне шеме да одредиш укупан број кругова на:

i цртежу 20 **ii** цртежу 50.

14. Одреди: **I** n-ти члан **II** четрдесети члан следећих аритметичких низова.

а) 12, 14, 16, 18, …
б) 5, 11, 17, 23, …
в) $-9, -5, -1, 3, \ldots$
г) 41, 45, 49, 53, …
д) 3, 14, 25, 36, …
ђ) 2, 11, 20, 29, …
е) 17, 14, 11, 8, …
ж) 38, 32, 26, 20, …
з) $-11, -19, -27, -35, \ldots$

15. Столице су поређане око столова као што је приказано на цртежима.



1 сто 2 стола 3 стола

а) Препиши и допуни табелу.

Број столова	1	2	3	4
Број столица	6			

б) Одреди број особа које могу да седну за 10 столова распоређених на овакав начин.

в) Одреди број особа које могу да седну за n столова на овакав начин.

г) Одреди број столова који су неопходни да би село 50 људи на овакав начин.

3 Геометрија и решавање проблема

Наставни циљеви

- Цртање 3Д-форми на изометријском папиру (папир са тачкицама).
- Анализирање 3Д-форми путем мрежа и пројекција.
- Одређивање равни симетрије код 3Д-форми.
- Стварање шаблона који се понављају од троуглова и четвороуглова о покривању равни користећи збир углова, ротацију за 180° и транслацију; познавање тога који ће правилан многоугао покрити раван и објашњење зашто то остали не могу.
- Познавање елемената који су потребни за осну симетрију, ротацију, транслацију и сличност.
- Познавање правила да се транслацијом, ротацијом и осном симетријом задржава дужина страница и величина углова и да се предмет пресликава у подударну слику, а сличношћу се задржава величина углова, али не и дужина страница.
- Мењање 2Д-форми у комбинацији са ротацијом, осном симетријом и транслацијом; описивање промене путем које је предмет трансформисан у своју слику.
- Коришћење координатне мреже за решавање проблема који укључују транслацију, ротацију, осну симетрију и сличност.
- Мењање 2Д-форми са датим центром и коефицијентом сличности који је позитиван цео број већи од 1; одређивање коефицијента сличности као размере дужина било које две адекватне дужи.

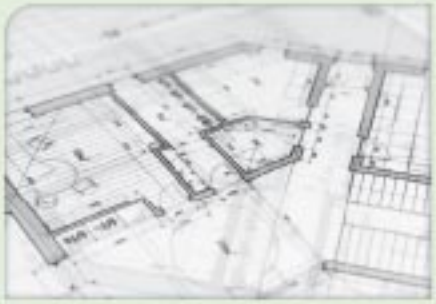
3.1 Три димензије

Цртање цртежа

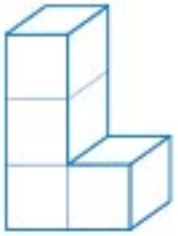
План је прецизна скица неког објекта или друге конструкције у одређеној размери.

План куће на слици десно је руком нацртао архитекта.

Данас се планови ретко цртају ручно, најчешће се користе компјутерски програми за цртање.



План и пројекције



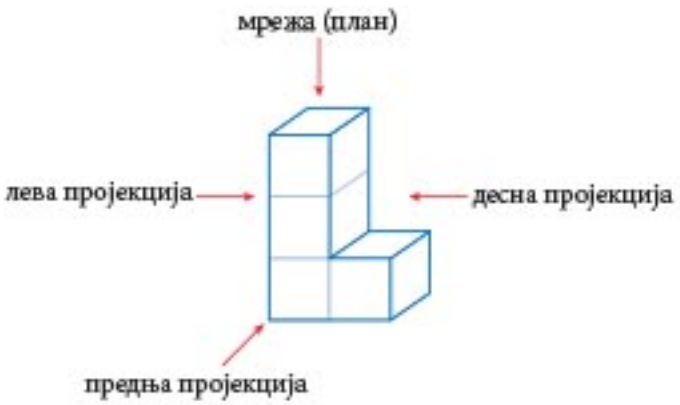
На цртежу је представљена 3Д-форма сачињена од 4 коцке.

Страна сваке коцке је дуга 2 cm.

На оваквим цртежима приказујемо 3Д-форму, али то нису прецизни цртежи у размери. Овакве цртеже називамо скице.

Цртањем **планова и пројекција,** 3Д-форму са различитим странама можемо да прикажемо у стварној величини или у размеру.

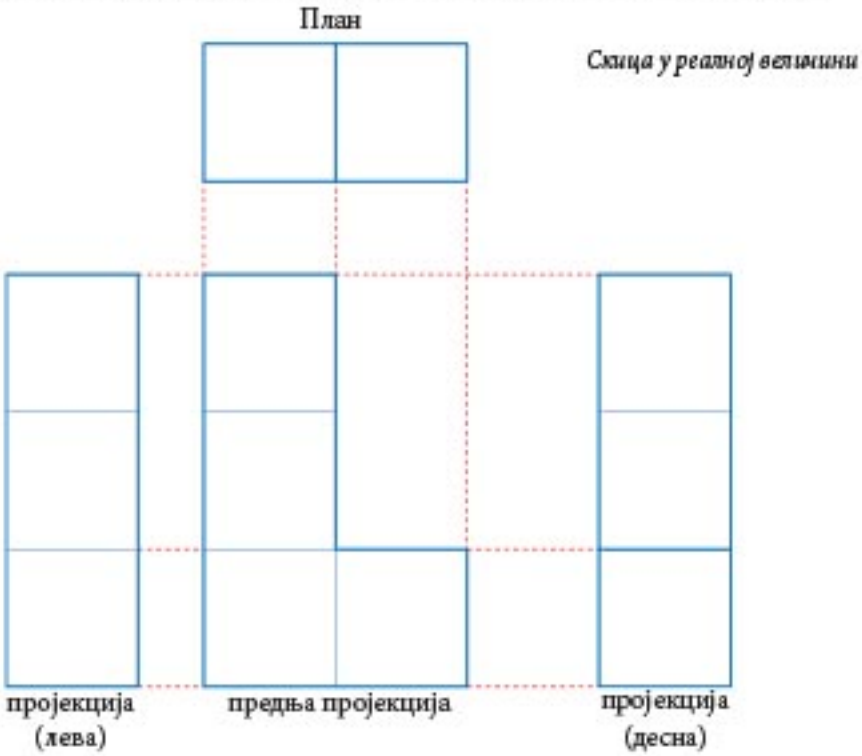
На цртежу је приказан план и пројекције једне 3Д-форме.



План је изглед 3Д-форме гледане одозго.

Предња пројекција је изглед 3Д-форме гледане с предње стране.

Бочне пројекције су изгледи 3Д-форме гледане са леве, односно десне стране.



Цртеж је нацртан у реалној величини. За веће 3Д-форме можемо цртати у размери.

Испрекидане црвене праве нису неопходне, али их користимо да бисмо приказали да план и пројекције имају исте димензије.

Обично није неопходно цртати обе бочне пројекције.

На десној страни пројекције примећујемо једну тамнију линију.

Она означава да постоји промена у нивоу насупрот пројекцији.

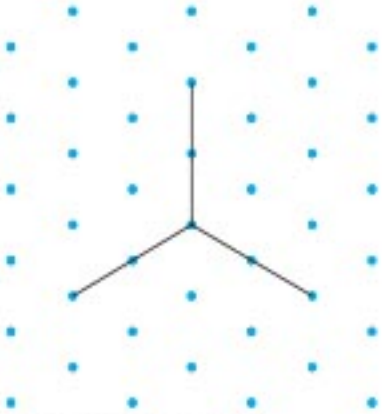
Изометријски цртежи

Други начин приказивања тродимензионалних објеката у равни је коришћењем **изометријског папира.**

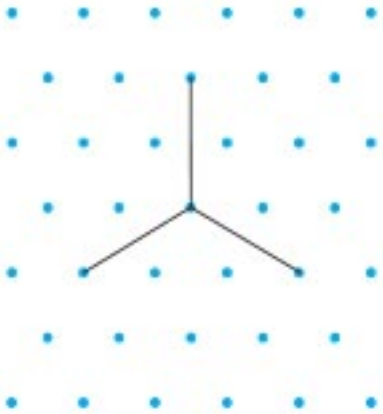
Изометријски папир је исцртан мрежама тачака постављених на теменима једнакостраничног троугла обично на међусобном растојању од 1cm.

Важно је да папир буде постављен у правилан положај када цртамо 3Д-форму.

Папир је правилно постављен уколико је права која пролази кроз три тачке вертикална.



правилан положај



неправилан положај

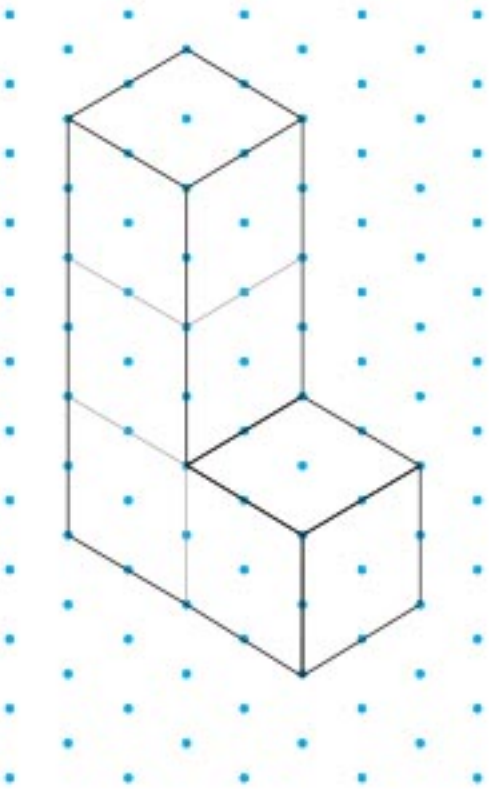
На слици је приказан изометријски цртеж 3Д-форме у облику слова L.

Примећујемо да вертикалне линије стварно стоје вертикално на цртежу.

Све праве пролазе кроз потребне тачке.

Цртеж је нацртан у реалној величини.

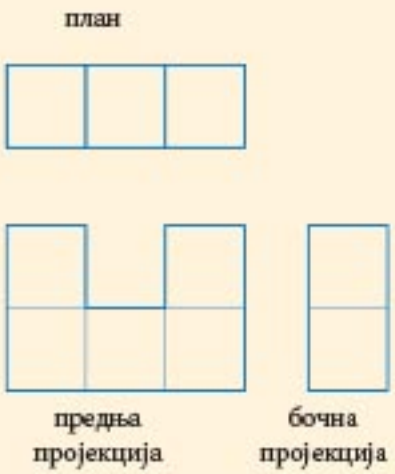
Свака ивица 3Д-форме је нацртана у реалној дужини.



Пример

На цртежу је приказана план и пројекција једне 3Д-форме.

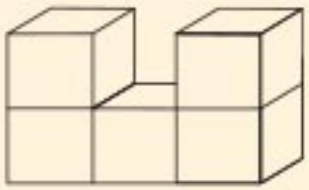
Нацртај 3Д-форму.



Прво цртамо скицу 3Д-форме.

Цртамо цртеж 3Д-форме како би требало да изгледа у простору.

Скица са десне стране приказује 3Д-форму.

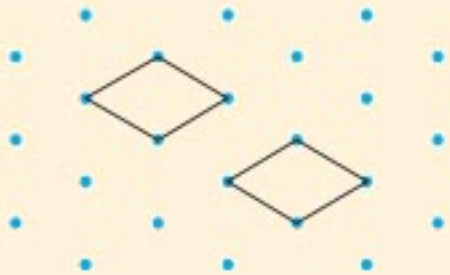


Почињемо са цртањем горњег дела 3Д-форме на изометријском папиру.

Проверавамо да ли је папир у правилном положају.

Сваки од малих квадрата изгледа као ромб.

Странице ромбова имају дужину 1 cm.



Затим цртамо вертикалне линије.



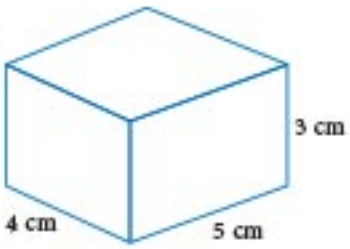
Цртеж завршавамо цртањем преосталих линија.



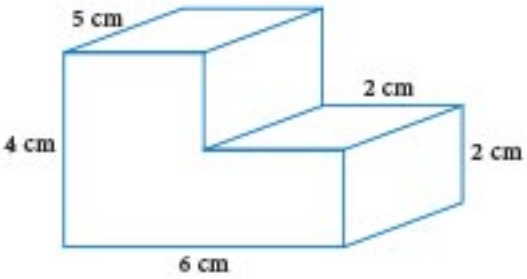
Задаци

1. Нацртај план, предњу пројекцију и једну бочну пројекцију за следеће 3Д-форме.

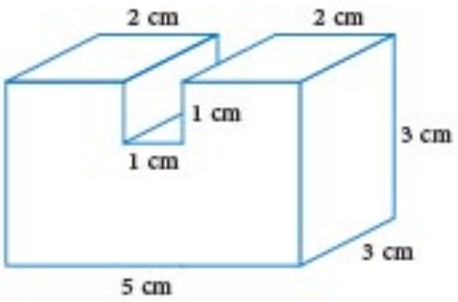
а)



б)

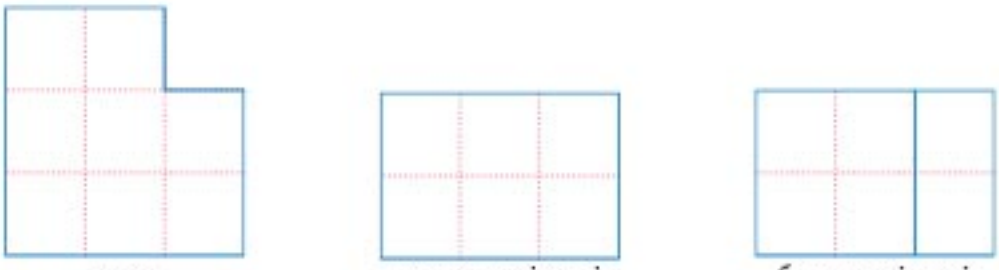


в)



2. 3Д-форме из претходног задатка нацртај на изометријском папиру.

3. На цртежима је приказан план и пројекције једне 3Д-форме.



Нацртај 3Д-форму на изометријском папиру.

4. На цртежима су приказан план, предња пројекција и једна бочна пројекција једне 3Д-форме.

Скицирај сваку од форми и запиши њен математички назив.

а)



б)



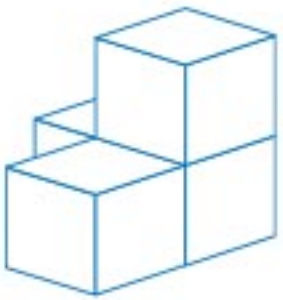
в)



5. Дата 3Д-форма је састављена од четири коцке.

Ивица коцке је дугачка 2 cm.

Нацртај план и пројекцију 3Д-форме.

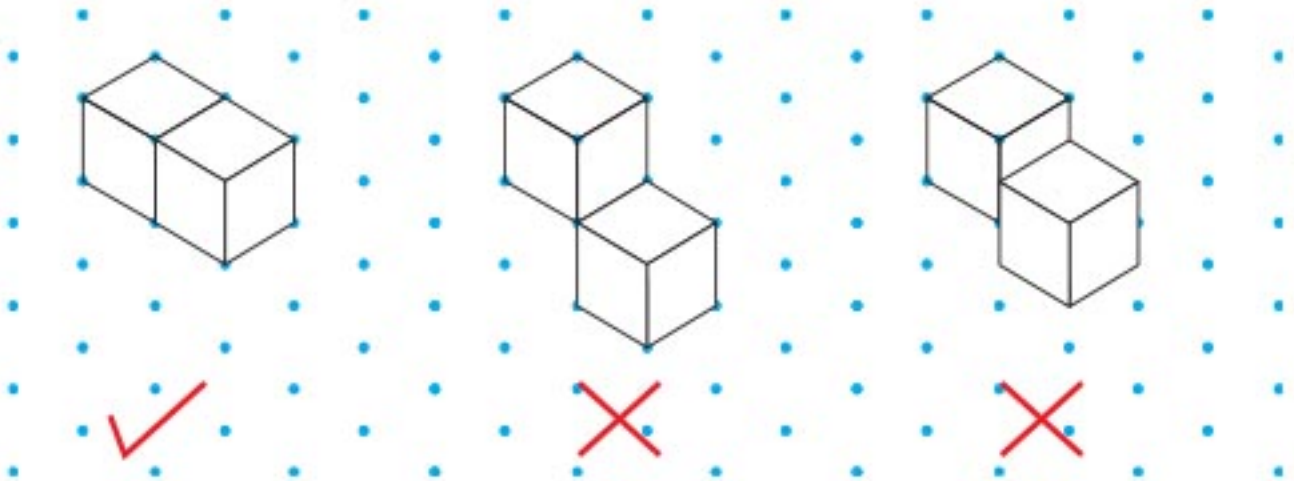


6. 3Д-форма из претходног задатка се састоји од четири спојене коцке.

Одреди друге 3Д-форме која се могу формирати спајањем четири коцке.

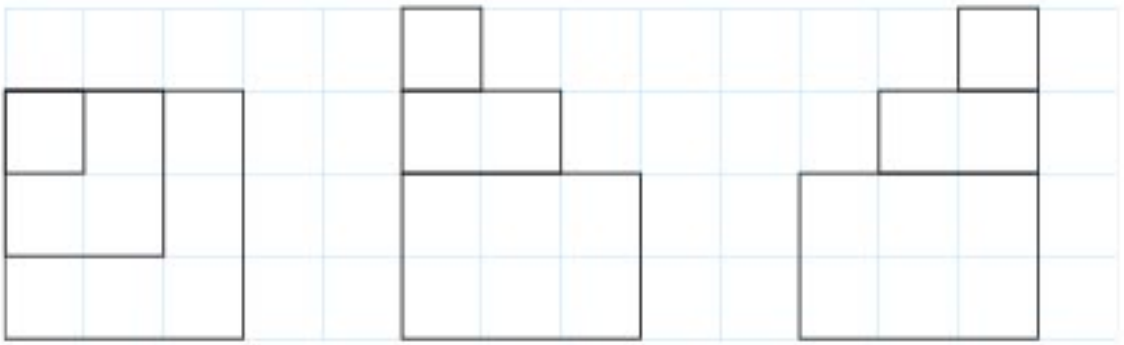
Коцке су спојене тако што се додирују стране целом површином и не преклапају се, односно не улазе једна у другу.

Користи мале коцке да видиш како изгледа 3Д-форма пре него што је нацрташ.



Нацртај добијене 3Д-форме на изометријском папиру.

7. На цртежима је приказан план и пројекције једне 3Д-форме.



план | предња пројекција | бочна пројекција

Нацртај 3Д-форму на изометријском папиру.

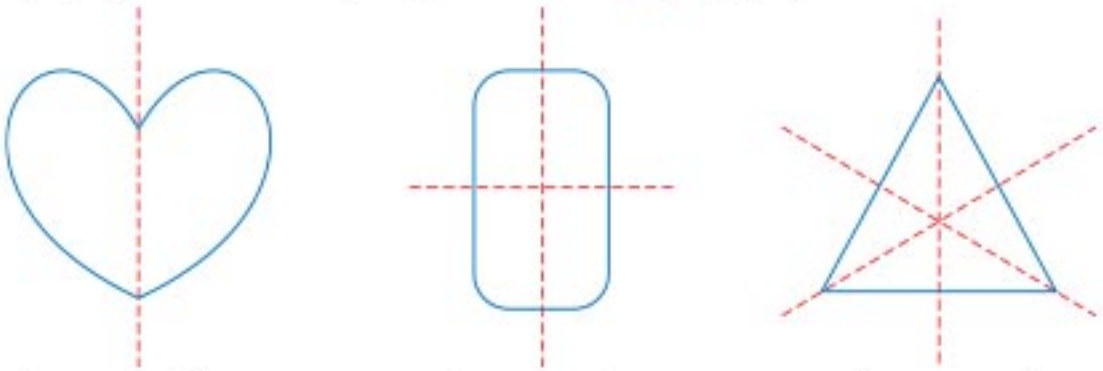
Направи скицу 3Д-форме помоћу спојених коцки.

3.2 Осна симетрија у три димензије

У равни, оса симетрије дели 3Д-форме на два **подударна** дела.

Сваки од делова је симетрична слика другог.

На цртежу су приказани неки примери **осне симетрије** 2Д-форме.

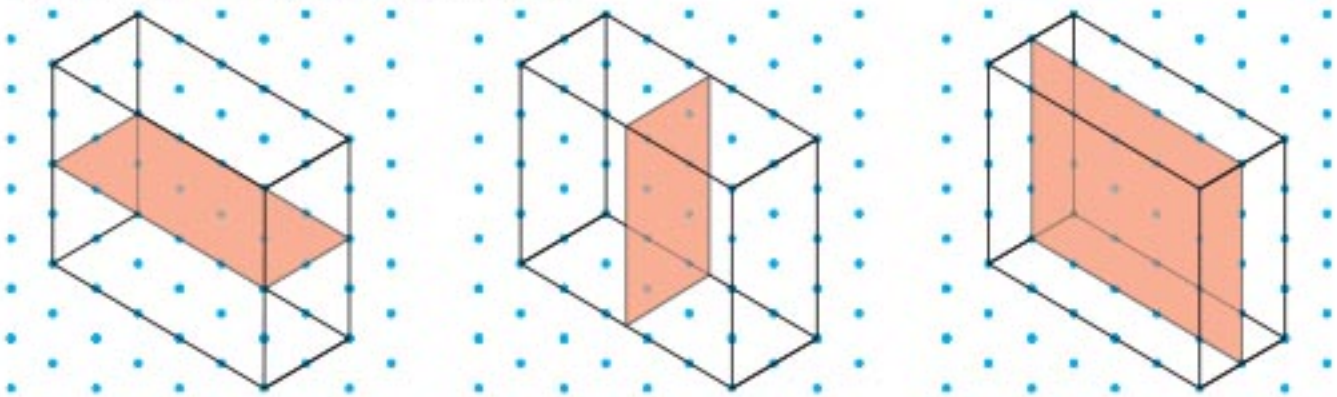


1 оса симетрије | 2 осе симетрије | 3 осе симетрије

У тродимезионалном простору, уочавамо симетрију у односу **на раван симетрије** која дели 3Д-форме на два подударна тела.

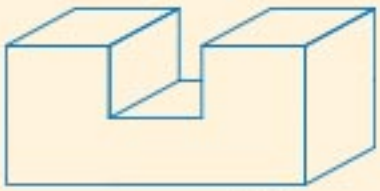
Дати квадрат има три равни симетрије.

Под равни подразумевамо равну површину.



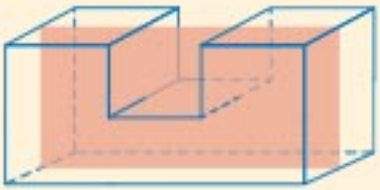
Пример

Одреди колико равни симетрије има дата 3Д-форма.



Да бисмо нашли равни симетрије, можемо нацртати скице 3Д-форме.





На скицама су приказане две равни симетрије дате 3Д-форме.

Задаци

1. На цртежу је приказана пирамида са квадратом у основи и једном равни симетрије.

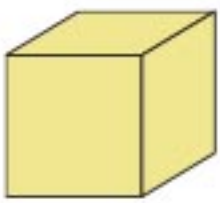
   Пирамида има још три равни симетрије.

   На посебним цртежима прикажи остале три равни симетрије.



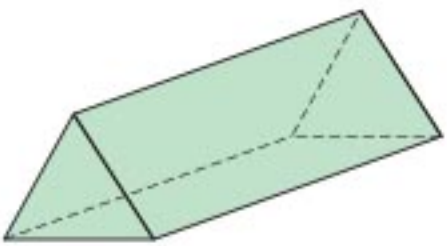
2. Одреди колико равни симетрије има сваки од приказаних тродимензионалних облика.

а)



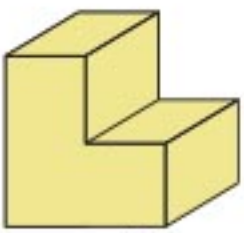
коцка

б)



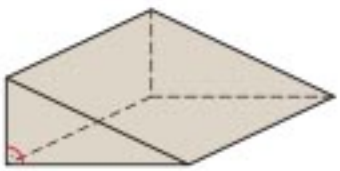
призма са основом једнакостраничног троугла

в)



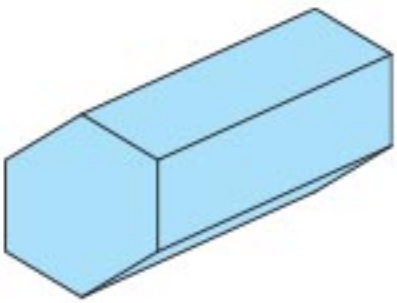
призма у L-форми

г)



призма са основом правоуглог троугла

д)

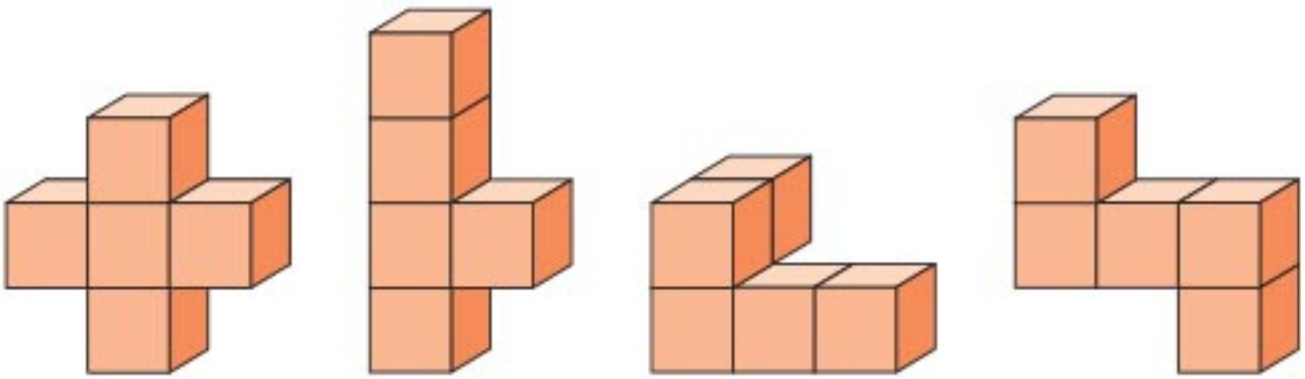


призма са основом правилног шестоугла

3. Свака од датих 3Д-форми састоји се од пет коцака.

Одреди број равни симетрије за сваку од тих 3Д-форми.

а) **б)** **в)** **г)**



4. Свака 3Д-форма из претходног задатка састоји се од пет коцака.

Направи другачији распоред за пет коцака тако што ће новодобијена 3Д-форма имати две равни симетрије.

Користи мале коцке да провериш да ли постоји 3Д-форма са две равни симетрије.

3.3 Тесалација

Римски мозаици

Реч „тесалација“ потиче од латинске речи „tesare“ која се некада писала „tessela“ и означавала је малу плочицу.

Тесалација или мозаик је уметност креирања слика састављених од комадића обојеног стакла, камена или другог материјала.

Прве мозаике срећемо врло давно. Сумери су правили мозаике пре 4000 година при украшавању грађевина.
Римљани су били нарочито познати по њиховим мозаицима на подовима и зидовима.

У Македонији постоје остаци римских мозаика у археолошком локалитету Стоби, у близини Велеса.

На слици је приказан један римски мозаик у Јордану.



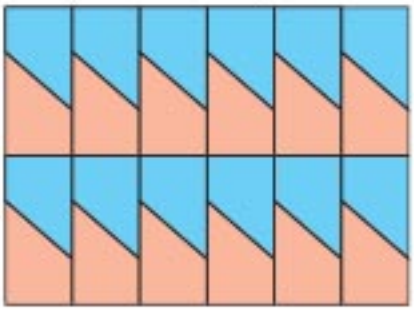


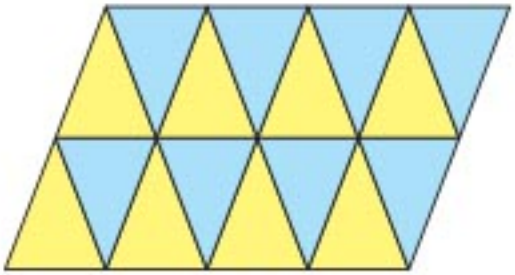
Троуглови и четвороуглови

Шема форми које покривају равну површину без преклапања или празнина називамо **тесалација** или **мозаик.**

На сликама су приказани примери мозаика.

У свакој шеми постоји облик који се понавља више пута.





Погледајмо поступак за формирање мозаика од троуглова.

Корак 1

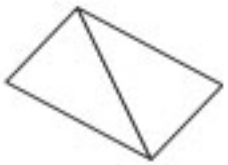
Цртамо произвољни троугао.



Корак 2

Нови троугао добијен ротацијом почетног троугла за 180°, цртамо непосредно до почетног троугла.

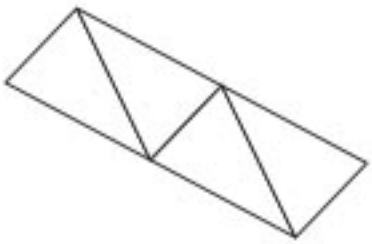
Добијамо паралелограм формиран од два троугла.



Корак 3

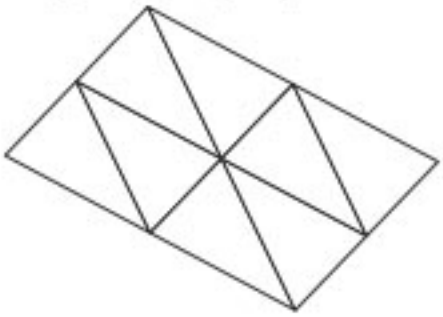
Понављамо прва два корака да бисмо поставили други паралелограм непосредно до првог.

Наставимо са прављењем низа троуглова.



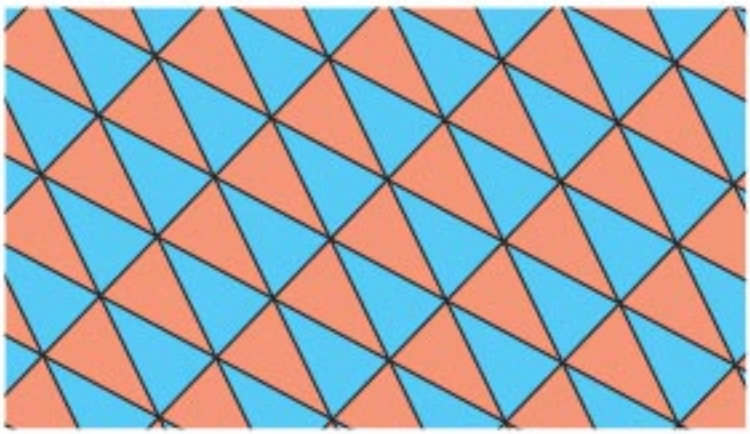
Корак 4

Цртамо други ред троуглова непосредно до првог реда.



Корак 5

Сада можемо да видимо како је изграђена тесалација. Крајњу шему бојимо.



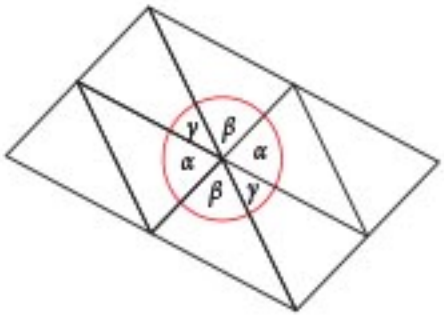
Означићемо углове троугла да бисмо видели зашто је могуће формирање тесалације.

Ово је почетни троугао са означеним угловима α, β и γ.



Збир углова у троуглу је $180°$, па је $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Посматрајмо угао формиране тесалације.



Око темена у коме се спајају четири четвороугла, цртамо кружницу. Примећујемо да се сваки од углова почетног троугла појављује по два пута у овој кружници.

Збир углова у темену је $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$

$$= 2(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$= 2 \cdot 180°$$
$$= 360°$$

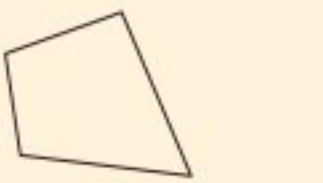
Знамо да пуни угао има $360°$ и то значи да је једна 2Д-форма тесалација ако је збир углова у темену у коме се спајају 2Д-форме једнак $360°$.

Пример

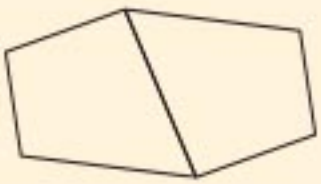
а) Формирај тесалацију од четвороугла помоћу претходно описаног поступка.

б) Покажи да збир углова у сваком унутрашњем темену тесалације износи $360°$.

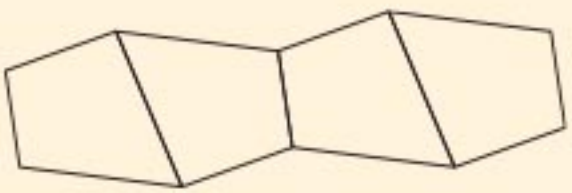
а)



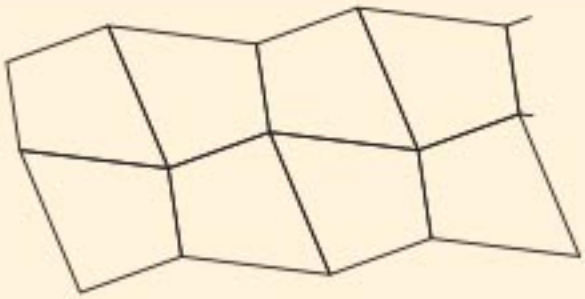
Корак 1: Цртамо четвороугао.



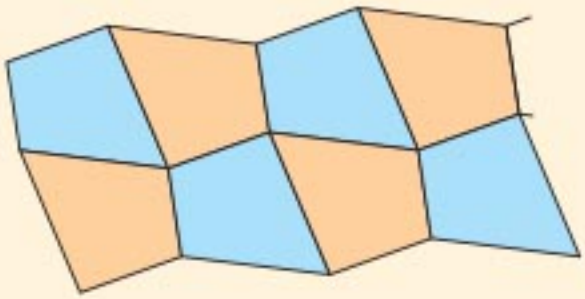
Корак 2: Цртамо четвороугао добијен ротацијом за $180°$ непосредно до почетног четвороугла.



Корак 3: Понављамо процес да бисмо формирали низ четвороуглова.



Корак 4: Цртамо други ред непосредно до првог реда.



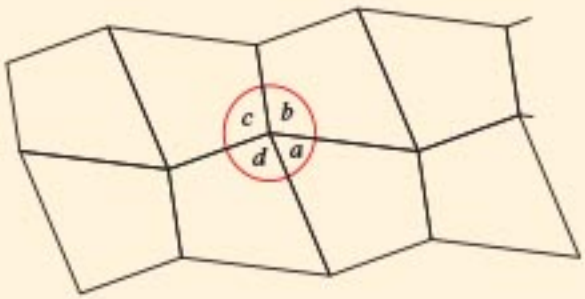
Корак 5: Бојимо крајњи мозаик.

б)



Означавамо сва четири угла a, b, c и d темена четвороугла.

Збир углова у четвороуглу је 360°, па је $a + b + c + d = 360°$.



Означавамо углове у унутрашњем темену крајње форме.

Четири угла у сваком унутрашњем темену су a, b, c и d.

Знамо да је збир углова у четвороуглу $a + b + c + d = 360°$, па закључујемо да је збир углова у темену 360°. Значи да је формирана тесалација.

Задаци

1. Прецртај троугао у свеску.

Користи горе описани поступак за цртање тесалације.

Нацртај тесалацију од датог троугла.



2. Прецртај четвороугао у свеску.

Користи горе описани поступак за цртање тесалације.

Нацртај тесалацију од датог четвороугла.



3. **а)** Нацртај тесалацију од датог четвороугла.

б) Означавањем углова покажи да збир углова у сваком унутрашњем темену тесалације износи 360°.

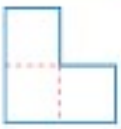


4. 2Д-форма има облик слова L и састављена је од два квадрата.

Постоји неколико начина на које се може формирати теселација ове 2Д-форме.

Нацртај тесалацију дате 2Д-форме.

Цртај у свесци на квадратиће да лакше формираш тесалацију.

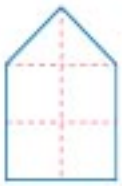


5. На цртежу је представљен петоугао са унутрашњим угловима од 90°, 90°, 135°, 90° и 135°.

а) Нацртај тесалацију од овог петоугла.

б) Покажи да је збир углова сваког унутрашњег темена 360°.

Нацртај барем 8 копија дате фигуре да уочиш како продужава шема у тесалацији.



3.4 Описивање трансформација

У VII и у VIII разреду смо учили о четири врсте **трансформација.**

Трансформација мења **оригинал**, почетну 2Д-форму, у **слику**, крајњу 2Д-форму.

Трансформације које смо до сада учили су осна симетрија, ротација, транслација и сличност.

При осној симетрији, ротацији или транслацији, слика је подударна са оригиналом.

Ако су две 2Д-форме подударне, тада то значи да оне имају једнаке странице и једнаке углове.

Ако комбинујемо две или више оваквих трансформација, слика остаје подударна, симетрична са оригиналом.

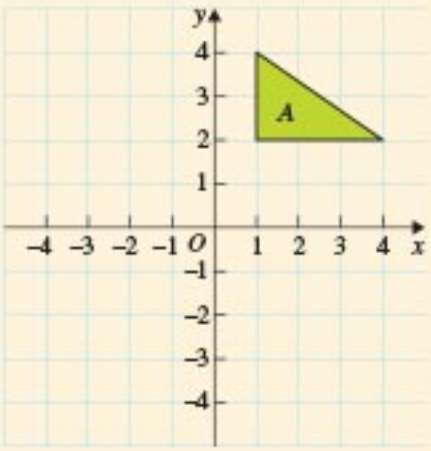
Пример 1

Прецртај цртеж у свеску на квадратиће.

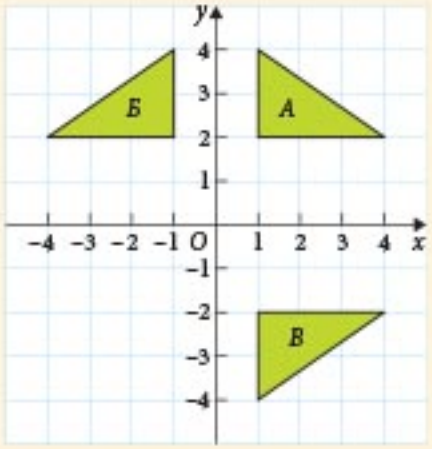
а) Одреди слику троугла А који се добија симетријом у односу на *y*-осу. Означи нови троугао Б.

б) Ротирај 2Д-форму Б за 180° око (0, 0). | Нову 2Д-форму означи са В.

в) Детаљно опиши јединствену трансформацију којом се 2Д-форма А пресликава у 2Д-форму В.



а) и б)



На цртежу су приказане 2Д-форме Б и В после осне симетрије и ротације.

в) Трансформација која пресликава 2Д-форму А у 2Д-форму В је осна симетрија.

Оса симетрије је x оса.

Детаљан опис трансформације је: Осна симетрија у односу на x-осу.

Детаљан опис

Да видимо шта се подразумева под детаљним описом сваке трансформације.

Осна симетрија

Треба да је задата оса симетрије. Она може бити дата као једначина праве.

Ротација

Потребно је да су дати:

- Центар ротације, који је често дат координатама.

- Угао ротације, у степенима или као део кружнице (у виду разломка).

- Смер ротације (у смеру кретања казаљки на сату или смеру супротном од кретања казаљки на сату). Ако је угао ротације 180°, онда није потребно наводити смер ротације.

Транслација

Потребно је да је дат детаљан опис о померању.

Транслација се често представља као растојање удесно (или улево) и растојање према горе (или надоле).

За смерове можемо да користимо и запис са вектором, на пример: (x, y).

Транслација за вектор (x, y) значи померање за x јединица удесно или улево и за y јединица према горе или према доле.

Ако је вредност x позитивна, онда је померање удесно.

Ако је вредност x негативна, онда је померање улево.

Ако је вредност y позитивна, онда је померање према горе.

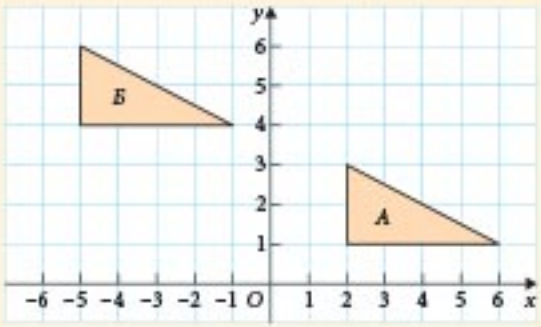
Ако је вредност y негативна, онда је померање према доле.

На пример, померање за вектор $(-4, -5)$ значи померање за 4 јединице улево и за 5 јединица према горе.

Пример 2

На цртежу су приказане 2Д-форме *А* и *Б*.

Детаљно опиши трансформацију која пресликава 2Д-форму А у 2Д-форму *Б*.



2Д-форма *Б* је подударна са 2Д-формом *А* и има исти изглед.

Значи имамо транслацију у координатном систему.

2Д-форма Б добија се померањем 2Д-форме А за 7 квадратића у лево и за 3 квадратића према горе.

Трансформација од *А* до *Б* је транслација, 7 квадратића улево и 3 квадратића према горе.

Транслација за вектор (–7, 3) јесте други детаљни опис трансформације.

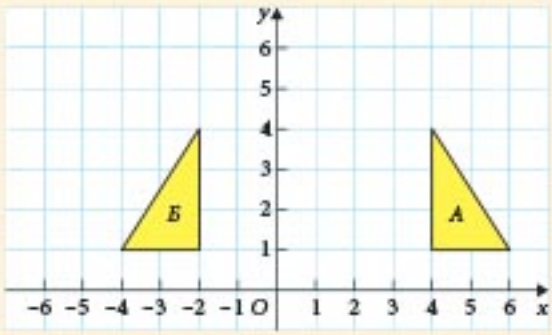
Пример 3

Нацртај квадратну координатну мрежу са вредностима за x од –6 до 6 и са вредностима за y од 0 до 6.

Нацртај троугао А са теменима у (4, 1), (4, 4) и (6, 1).

Нацртај други троугао Б са теменима у (–2, 1), (–2, 4) и (–4, 1).

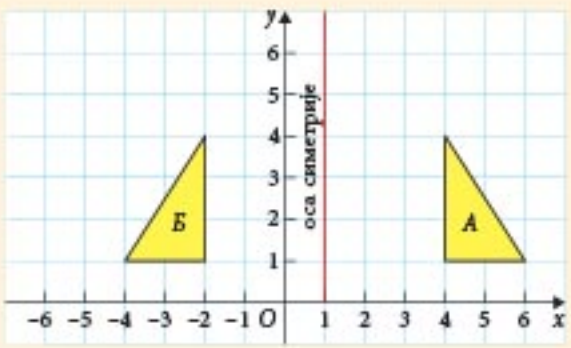
Детаљно опиши трансформацију троугла А у троугао Б.



Прво цртамо осе.

Означавамо и повезујемо дате тачке да бисмо добили троугао А.

Означавамо и повезујемо дате тачке да бисмо добили троугао Б.



Троуглови су подударни, али је један симетричан са другим у односу на једну праву.

Та права је оса симетрије – нацртана је у средини између њих.

Оса симетрије је права црвене боје.

Једначина осе симетрије је $x = 1$.

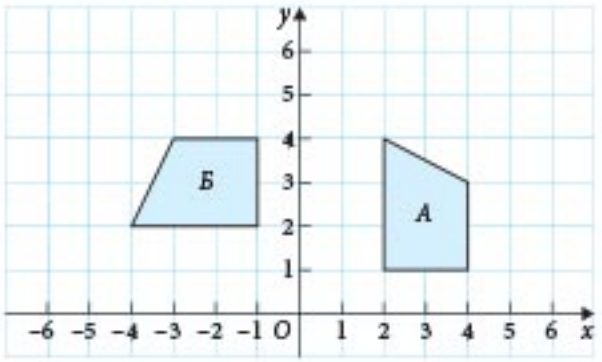
Подсети се на једначине праве.

Трансформација од А у Б је осна симетрија у односу на праву $x = 1$.

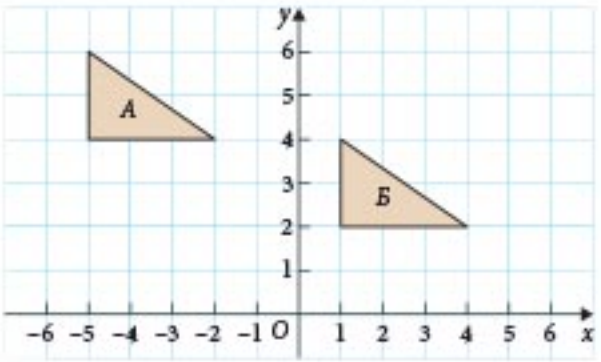
Задаци

У задацима од **1** до **9** детаљно опиши трансформацију из 2Д-форме *А* у 2Д-форму *Б*.

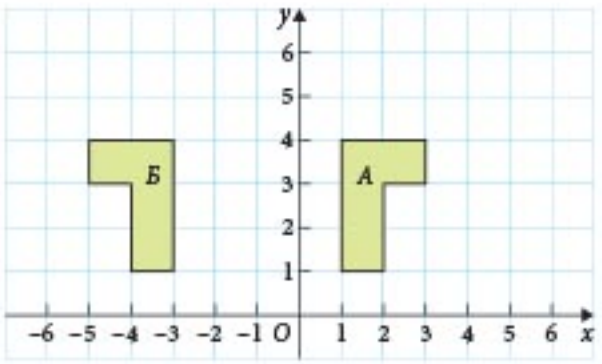
1.



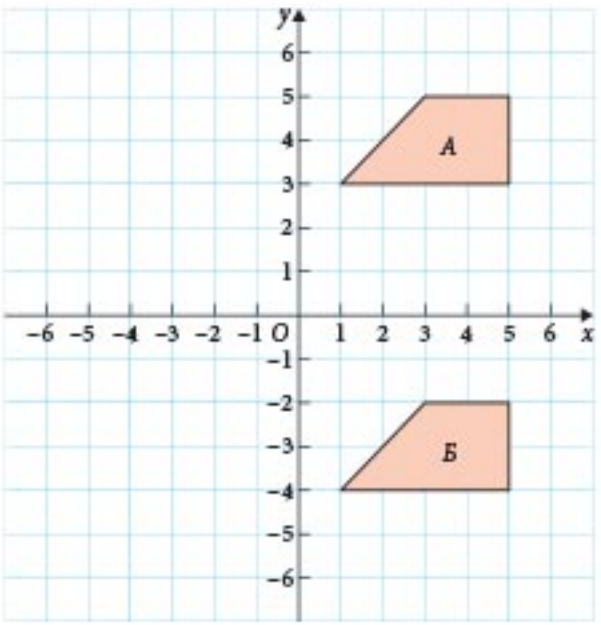
2.



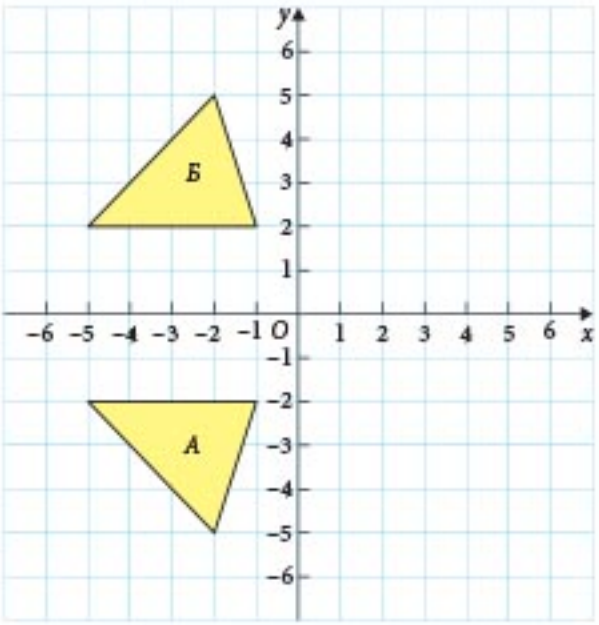
3.



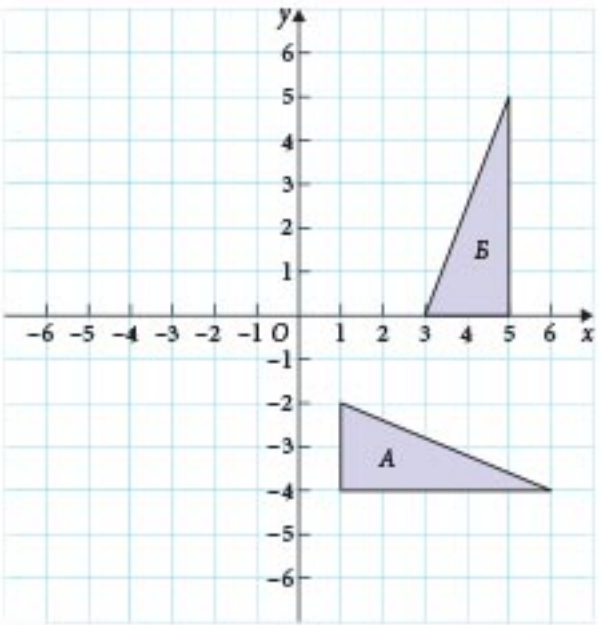
4.



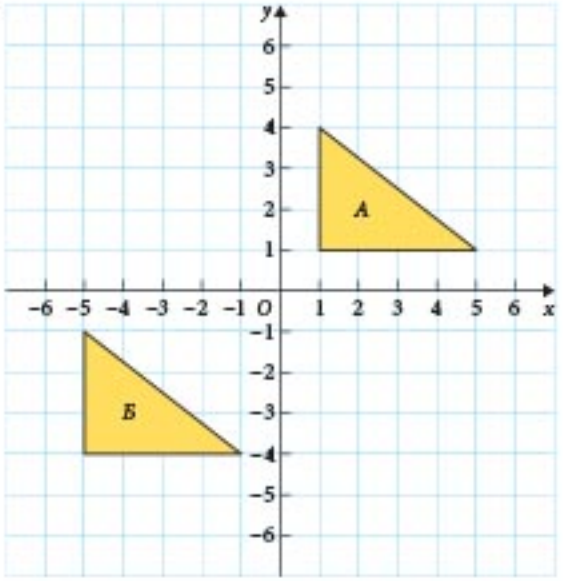
5.



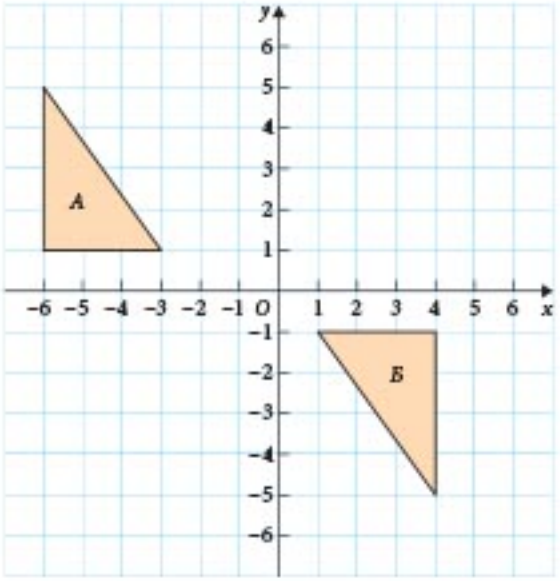
6.



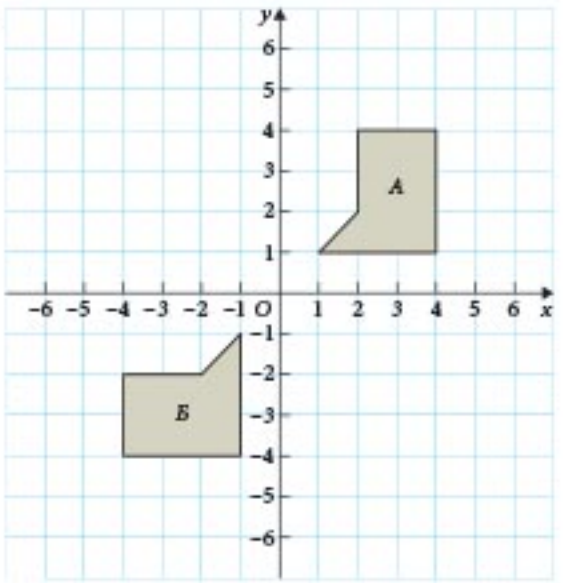
7.



8.



9.



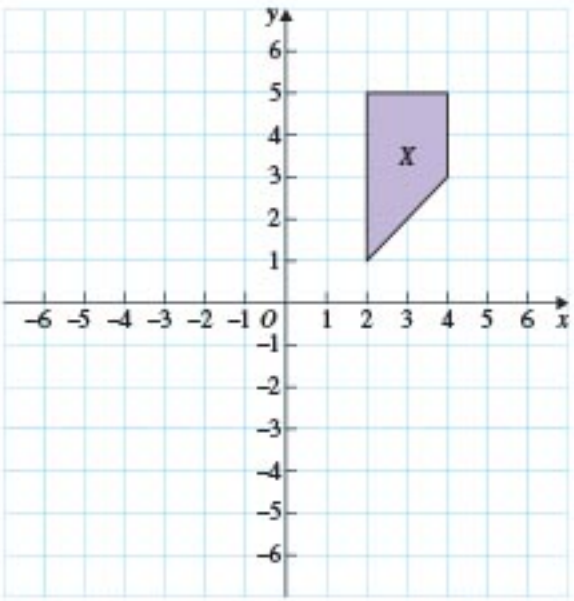
10. Прецртај цртеж у свеску на квадратиће.

а) Нађи 2Д-форму Y која је осно симетрична са 2Д-формом X у односу на y-осу.

б) Ротирај 2Д-форму Y за 180° око тачке (0, 1). Означи слику са Z.

Користи паус-папир за прецртавање да нацрташ.

в) Опиши детаљно трансформацију од X у Z.



11. **а)** Нацртај квадратну координатну мрежу са вредностима оса од −6 до 6.

б) Нацртај 2Д-форму А у облику слова L са означеним теменима у (4, 1), (4, 4), (5, 4), (5, 2), (6, 2) и (6, 1).

в) Нацртај 2Д-форму Б која је осно симетрична са 2Д-формом А у односу на x-осу.

г) Нацртај 2Д-форму В која је осно симетрична са 2Д-формом Б фигуру у односу на праву $x = 1$.

д) Изврши транслацију од В за 5 квадратића према горе. Означи нову 2Д-форму са Г.

ђ) Детаљно опиши једину трансформацију која трансформише А у Г.

Користи паус-папир за прецртавање.

12. Инверзном трансформацијом слика се трансформише поново у оригинал.

На пример, инверзна трансформација транслације за 5 квадратића удесно је транслација за 5 квадратића улево.

Детаљно опиши инверзну трансформацију сваке од следећих трансформација.

а) Осна симетрија у односу на x-осу.

б) Транслација за вектор (3, −4).

в) Ротација за 180° око тачке (0, 0).

г) Осна симетрија у односу на праву $y = -x$.

д) Ротација за 90° у смеру кретања казаљки на сату.

ђ) Транслација за вектор (0, 4).

Нацртај цртеж да одредиш инверзне трансформације.

3.5 Повећавање и сличност

Сличне 2Д-форме

Транслација, осна симетрија и ротација не мењају величину ни облик 2Д-форме.

За разлику од њих, трансформацијом се мењају величина и облик.

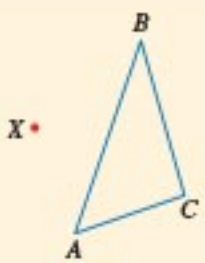
После повећавања, слика има исте углове као оригинал, али се мења величина 2Д-форме. За ове 2Д-форме кажемо да су сличне.

Укратко, оригинал и слика имају исту форму али неједнаке величине.

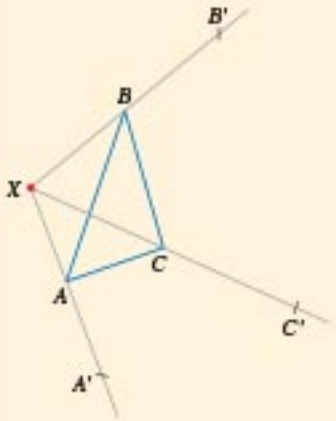
Путем следећа два примера подсетићемо се како се цртају сличне 2Д-форме при датом центру и коефицијенту сличности.

Пример 1

Прецртај цртеж у свеску.



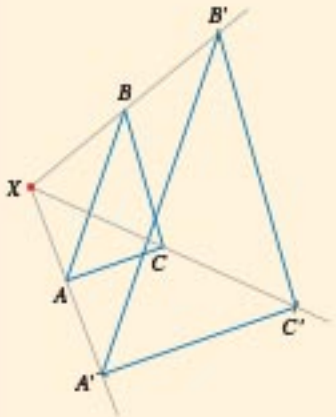
Повећај троугао ABC са коефицијентом 2 и центром сличности у тачки X.



Прво цртамо праве од X кроз свако теме троугла.

Означавамо тачку A', тако да важи $\overline{XA'} = 2 \cdot \overline{XA}$.

Означавамо тачку B' и C', тако да важи $\overline{XB'} = 2 \cdot \overline{XB}$ и $\overline{XC'} = 2 \cdot \overline{XC}$.



На крају, повезујемо све три тачке A', B' и C' да би формирали нови троугао.

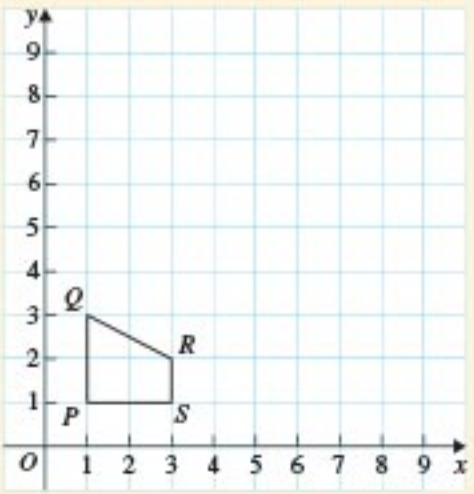
Пример 2

Прецртај цртеж у свеску на квадратиће.

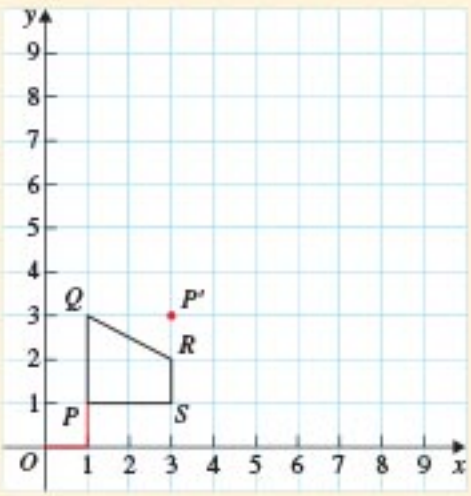
а) Повећај $PQRS$ са коефицијентом 3 и центром (0. 0). Слику означи са $P'Q'R'S'$.

б) Измери стране и израчунај:

I $\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}}$ II $\dfrac{\overline{Q'S'}}{\overline{QS}}$



а)



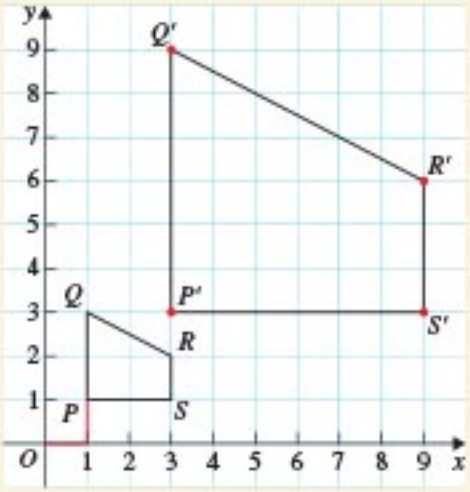
Када је 2Д-форма нацртана на квадратној координатној мрежи или на листу са квадратићима, лакше можемо да нацртамо повећавање а да не цртамо праве.

Теме P је 1 квадратић дијагонално према горе од центра сличности (0, 0).

Множимо број квадратића са коефицијентом сличности.

Слика овог темена ће бити 3 квадратића дијагонално према горе.

На цртежу, слика P је означена са P'.



Понављамо исти поступак и за тачке Q', R' и S' да бисмо одредили положаје тачака Q', R' и S'.

Повезујемо четири добијене точке и добијамо повећану слику фигуре $PQRS$.

б) I Ако сваки квадратић има страницу 1 cm, онда $\overline{P'Q'}$= 6 cm, а $\overline{PQ}$ = 2 cm.

Имамо $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{6}{2} = 3$

II $\overline{Q'S'}$ = 8,49 cm и $\overline{QS}$ = 2,83 cm Меримо дијагоналне праве.

$\frac{\overline{Q'S'}}{QS} = \frac{8,49}{2,83} = 3$

Решење може и да не буде тачно 3, ако мерење није прецизно.

Описивање сличности

Из решења под **б)** у претходном примеру извукли смо општи закључак.

Размера одговарајућих дужина на слици и оригиналу једнака је коефицијенту сличности.

Коефицијент сличности можемо израчунати мерењем две одговарајуће дужине и одређивањем њиховог количника.

Да бисмо одредили центар повећавања, потребно је да нацртамо помоћне праве линије кроз одговарајућа темена оригинала и слике.

Центар повећавања је у пресечној тачки тих правих.

Размотримо како треба да изгледа детаљан опис повећавања.

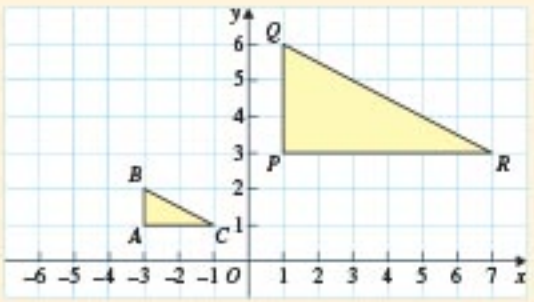
Повећавање

Ова трансформација се дефинише са:

- Коефицијентом сличности, који је број.
- Центром повећавања, који може бити дат као тачка са координатама.

Пример 3

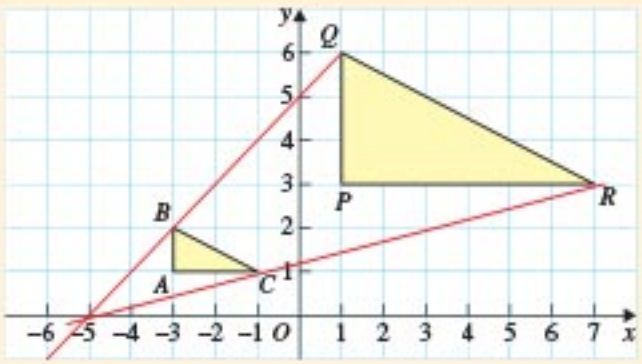
Детаљно опиши трансформацију троугла ABC у троугао PQR.



$\overline{PQ}$ и $\overline{AB}$ су одговарајуће странице.

$\overline{PQ} : \overline{AB} = 3 : 1 = 3$

Коефицијент је 3.



Прво одређујемо коефицијент.

Одређујемо центар повећавања.

Цртамо праву кроз два одговарајућа темена, Q и B.

Центар повећавања се налази негде на овој правој.

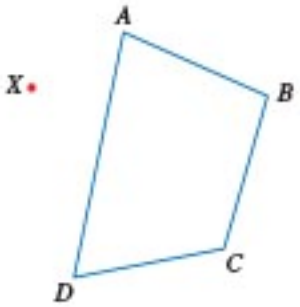
Исто понављамо за други пар одговарајућих темена.

Две праве се секу у тачки (–5, 0), значи да је та тачка је центар повећавања.

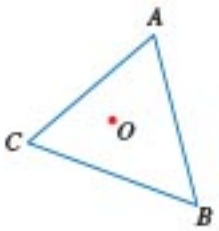
Задаци

За задатке **1** и **2** прецртај у свеску цртеже.

1. Повећај $ABCD$ коефицијентом 2 и центром X.

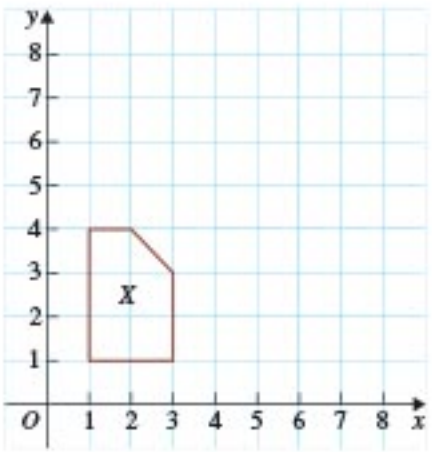


2. Повећај ABC коефицијентом 3 и центром O.

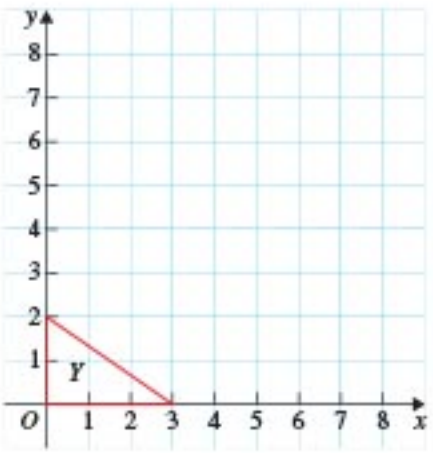


У задацима **3**, **4** и **5** прецртај цртеже у свеску.

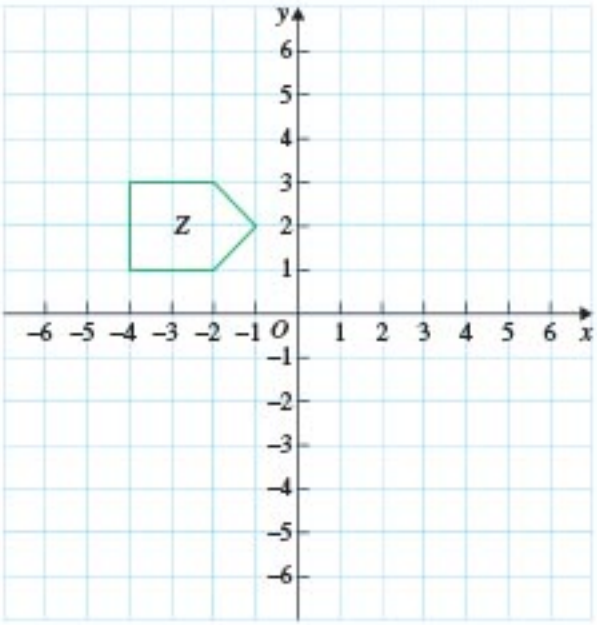
3. Повећај 2Д-форму X са коефицијентом 2 и центром (0, 0).



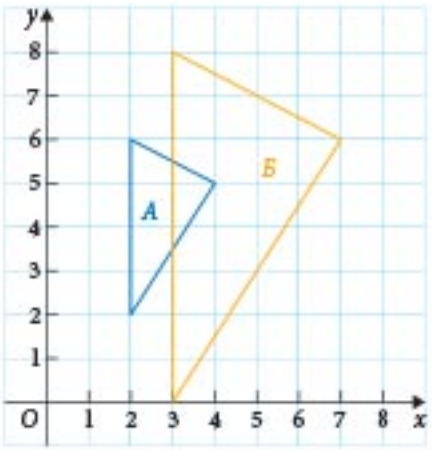
4. Повећај 2Д-форму Y са коефицијентом 3 и центром (0, 0).



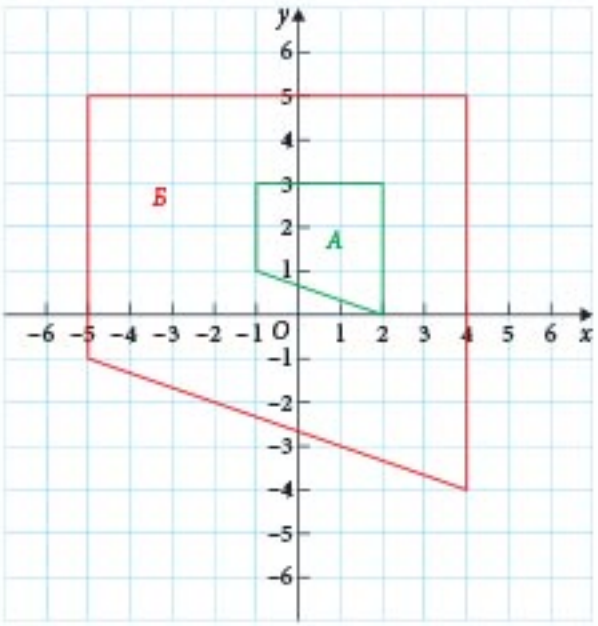
5. Повећај 2Д-форму Z са коефицијентом 3 и центром (−5, 4).



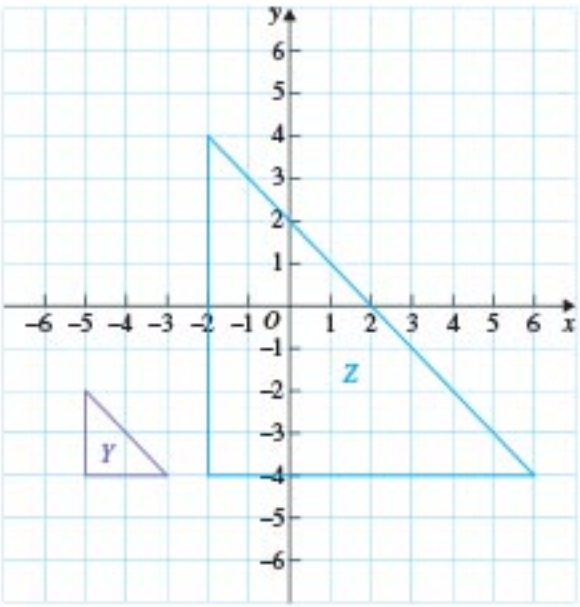
6. Детаљно опиши трансформацију из 2Д-форме А у 2Д-форму Б.



7. Детаљно опиши трансформацију 2Д-форме А у 2Д-форму Б.



8. Детаљно опиши трансформацију из 2Д-форме Y у 2Д-форму Z.



9. **а)** Нацртај координатни систем са вредностима од –6 до 6 на свакој од две координатне осе.

б) Означи тачке у (2, 3), (3, 6) и (3, 3). Повежи их како би формирале троугао. Означи троугао са T.

в) Повећај T коефицијентом 2 и центром за повећавање (5, 6). Означи нови троугао са U.

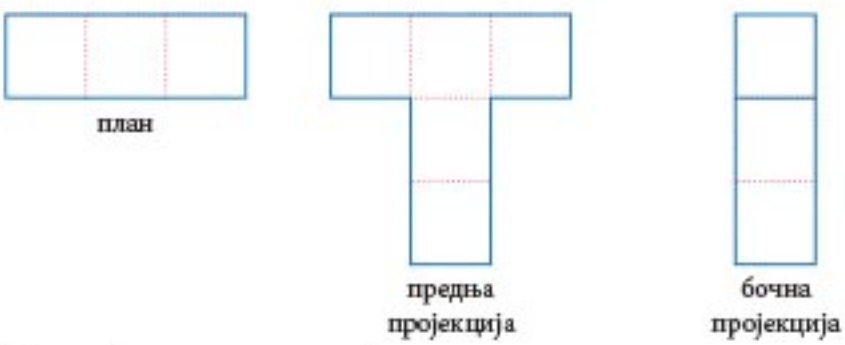
г) Повећај U коефицијентом 2 и центром за повећавање (3, 6). Означи нови троугао са V.

д) Детаљно опиши јединствену трансформацију троугла T у троугао V.

Трансформација је повећавање. Нацртај праве да одредиш центар повећавања.

Задаци за понављање

1. На цртежу је приказан план и две пројекције 3Д-форме.

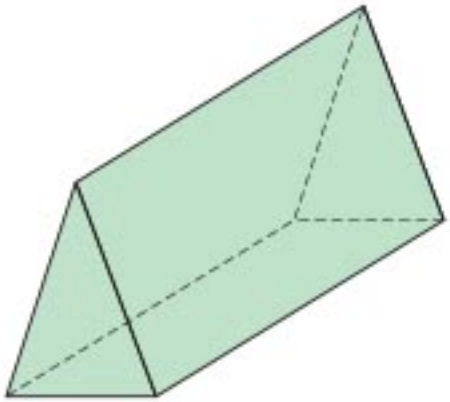


Нацртај тело на изометријском папиру.

2. Нацртај план и пројекцију за дато дату 3Д-форму.



3. **а)** На цртежу је приказана призма са основом једнакокраког троугла.

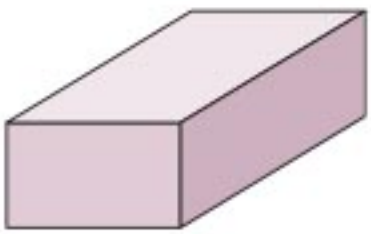


Прецртај цртеж и нацртај раван симетрије за ову 3Д-форму.

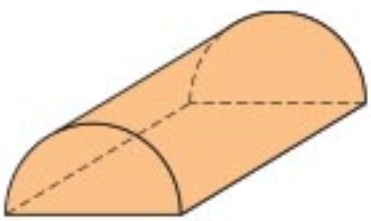
б) Одреди колико укупно равни симетрије има дата 3Д-форма.

4. Израчунај колико равни симетрије имају ове 3Д-форме:

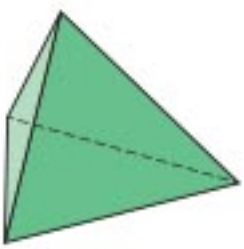
а) квадар



б) призма са основом полукруга



в) правилна троугаона пирамида (пирамида са основом једнакостраничног троугла)



5. Дати троугао има странице чије су дужине 4,5 cm, 2,5 cm и 4 cm.

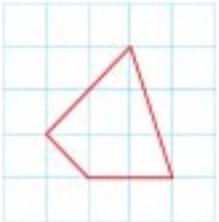
Прецртај троугао у свеску на квадратиће.

Нацртај мозаик од троуглова.



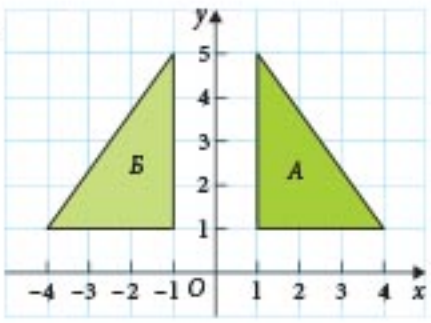
6. Прецртај четвороугао у свеску на квадратиће.

Нацртај мозаик од датих четвороуглова.

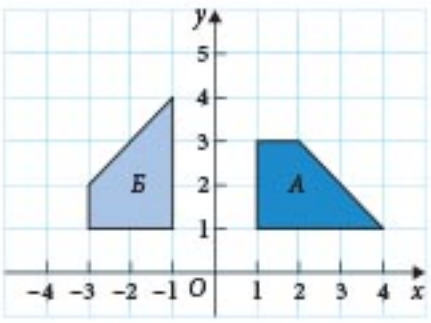


У задацима од **7** до **14**, детаљно опиши трансформацију којом се 2Д-форма А пресликава у 2Д-форму Б.

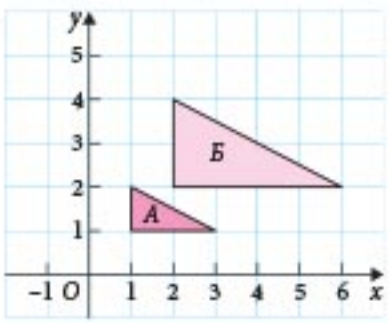
7.



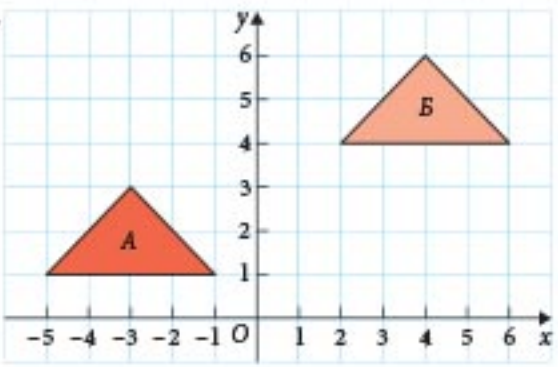
8.



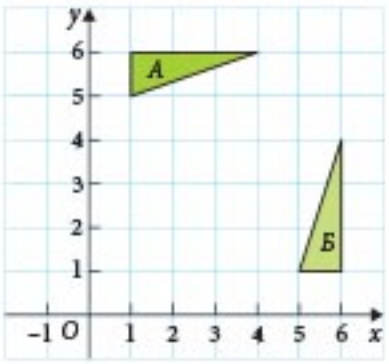
9.



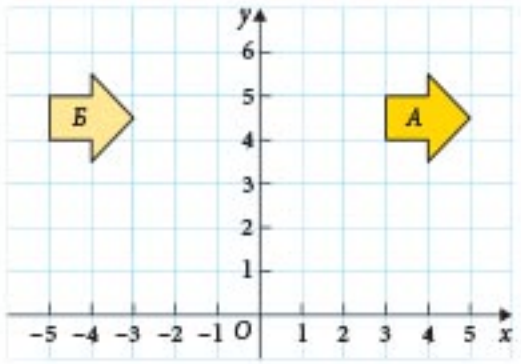
10.



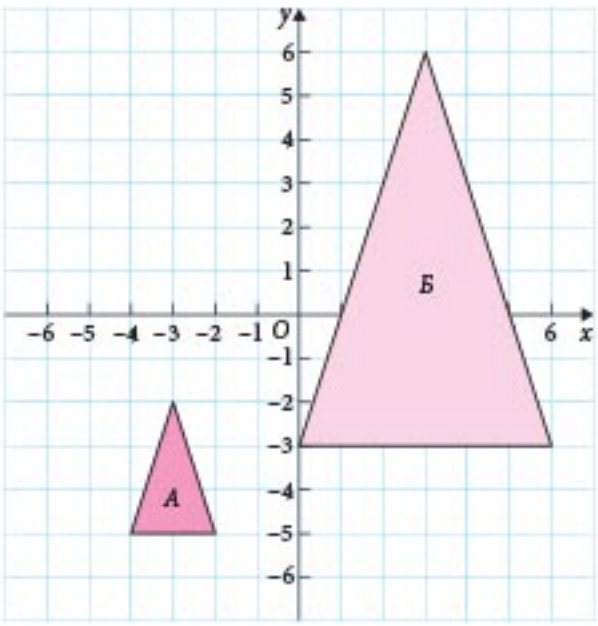
11.



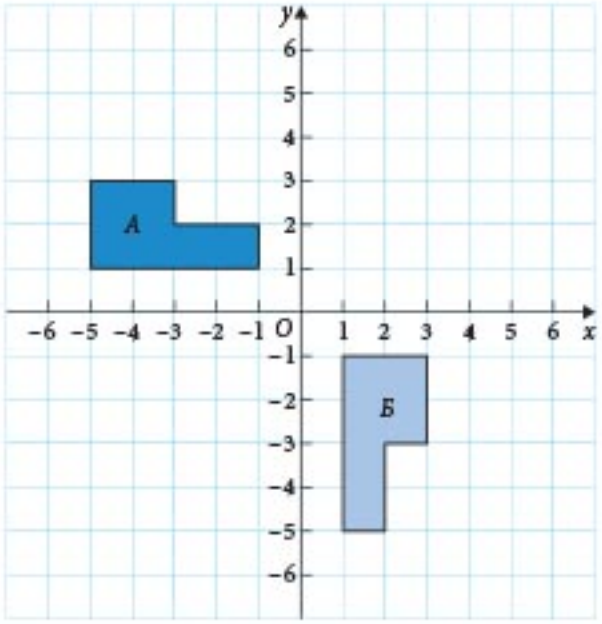
12.



13.



14.



15. Прецртај цртеж у свеску на квадратиће.

а) Ротирај 2Д-форму А за 180° око (1, 0).

Означи нову 2Д-форму са Б.

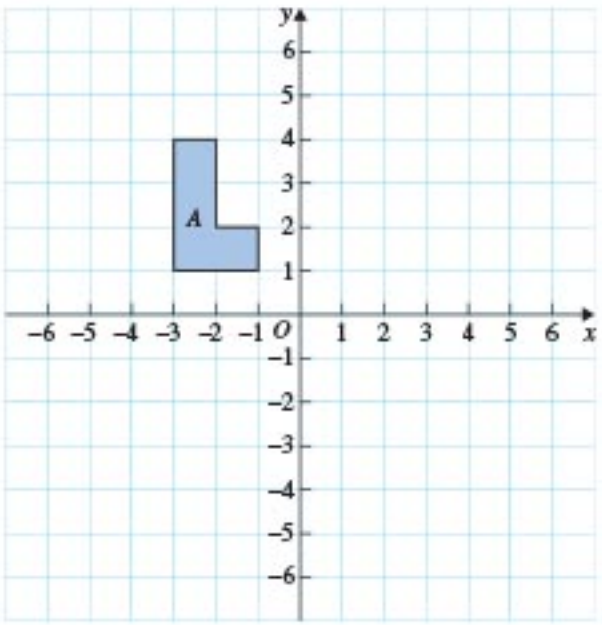
б) Нацртај 2Д-форму која је осносиметрична са 2Д-формом Б у односу на *y*-осу.

Означи нову 2Д-форму са В.

в) Изврши транслацију на 2Д-форме В за вектор (2, −2).

Означи нову 2Д-форму са Г.

г) Детаљно опиши јединствену трансформацију из 2Д-форме Г у 2Д-форму А.



16. Прецртај цртеж у свеску са квадратићима.

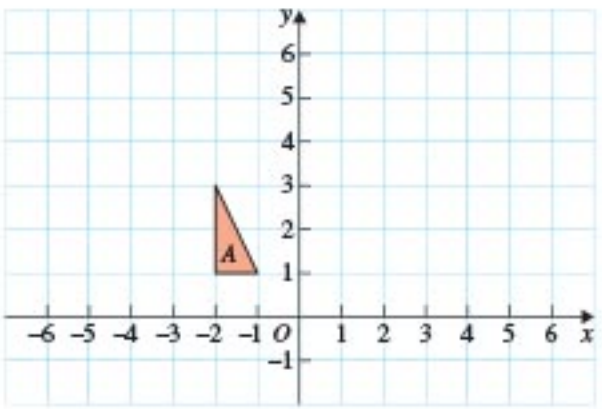
а) Повећај троугао А са коефицијентом 2 и центром (−4, 1).

Означи нову 2Д-форму са Б.

б) Нађи слику троугла Б при транслацији за вектор (2, 1).

Означи нову 2Д-форму са В.

в) Детаљно опиши јединствену трансформацију од А у В.



4 Мерење и решавање проблема

Наставни циљеви

- Претварање једне јединице мере у другу, нпр. за површину mm^2 у cm^2, cm^2 у m^2; за запремину mm^3 у cm^3, cm^3 у m^3. Познавање и употреба односа $1\ cm^3 = 1\ ml$.
- Знање да се земљина површина мери у хектарима (ha) и да је $1\ ha = 10000\ m^2$; претварање хектара у квадратне метре.
- Решавање проблема у вези са обимом и површином круга, укључујући и дугме π на калкулатору.
- Заокругљивање бројева до одређеног децималног места или одређеног броја значајних цифри; коришћење заокругљивања да би се дошло до решавања проблема до одређеног степена тачности.
- Решавање проблема у вези са мерењем у различитом контексту.

4.1 Претварање мерних јединица

Префикси за мерне јединице

Систем мерних јединица садржи мерне јединице за много различитих величина.

Метрички систем или Међународни систем мерних јдиница (SI) је систем мера који се заснива на декадном бројевном систему.

На пример, сила (њутн), јачина електричне струје (ампер) и фреквенција (херц).

До сада смо се упознали са мерним јединицама за дужину (**метар**), масу (**грам**) и запремину (**литар**).

Веће и мање мере именујемо датим префиксом мерне јединице. Ова табела приказује неке префиксе за именовање мера већих од основне мерне јединице.

	дека	хекто	кило	мега	гига	тера	пета
10^0	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}
један	десет	сто	хиљаду	милион	милијарда	билион	билијарда

На пример, мерна јединица за снагу је ват.

Милион вати називамо мегават.

Следећа табела приказује неке префиксе за именовање мера мањих од основне мерне јединице.

	деци	центи	мили	микро	нано	пико	фемто
10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
један	десетина	стотина	хиљадити део	милионити део	милијардити део	билионити део	билијардити део

Мерна јединица за енергију је џул.

Један милијардити део џула је наноџул.

Најчешће коришћени префикси су **кило**, **центи** и **мили**.

Пример 1

Допуни следеће тврдње.

а) 2790 центиметара = ... метара

б) 5,8 литара = ... милилитра

в) 867 килограма = ... тона

а) $1\,\text{cm} = \frac{1}{100}\,\text{m}$

$2790\,\text{cm} = \frac{1}{100} \cdot 2790\,\text{m}$

$2790\,\text{cm} = 27{,}9\,\text{m}$

Множење са $\frac{1}{100}$ је исто као дељење са 100.

$2790 : 100 = 27{,}9\,\text{m}$

б) $1\,\text{l} = 1000\,\text{ml}$

$5{,}8\,\text{l} = 1000 \cdot 5{,}8\,\text{ml}$

$5{,}8\,\text{l} = 5800\,\text{ml}$

в) $1000\,\text{kg} = 1\,\text{тон}$

1 тона = 1000 килограма.

$1\,\text{kg} = \frac{1}{1000}$ тона

$867\,\text{kg} = \frac{1}{1000} \cdot 867$ тона

$867\,\text{kg} = 0{,}867$ тона

Пример 2

Хасан има дрвену греду дугачку 2,4 метра.

Хоће да је подели на следећи начин да би направио мале играчке.

I 4 комада дугачких по 125 mm

II 7 комада дугачких по 9,5 cm

III 2 комада дугачких по 0,45 m

а) Израчунај укупну дужину коју треба да исече.

Решења запиши у центиметрима.

б) Колики ће део дрвета остати када Хасан буде пресекао све потребне комаде?

а) I $4 \cdot 125 = 500$

$500\,\text{mm} = 50\,\text{cm}$

Четири комада имају укупну дужину 50 cm.

II $7 \cdot 9{,}5 = 66{,}5$

Седам комада имају укупну дужину 66,5 cm.

III $2 \cdot 0{,}45 = 0{,}9$

$0{,}9\,\text{m} = 90\,\text{cm}$

Оба комада имају укупну дужину 90 cm.

$50 + 66{,}5 + 90 = 206{,}5$

Укупна дужина коју треба да исече Хасан је 206,5 cm.

б) $2{,}4\,\text{m} = 240\,\text{cm}$

$240 - 206{,}5 = 33{,}5$

Када је исекао потребну дужину, остало је још 33,5 cm дрвене греде.

Задаци

1. Препиши и допуни следеће тврдње.

а) 84,9 километара = ... метара.

б) 129 центиметара = ... милиметра.

в) 37,5 тона = ... килограма.

г) 8436 центиметара = ... метара.

д) 5,9 метара = ... милиметра.

ђ) 21 434 милилитра = ... литара.

е) 125 килограма = ... грама.

ж) 8030 метара = ... километра.

2. Изабери правилну мерну јединицу да допуниш следеће тврдње.

а) Калкулатор је дугачак приближно 16. .....

б) Количина кафе која стаје у једну шољицу је око 300 .....

в) Кревет је дугачак око 2 .....

г) Лаптоп има масу од приближно 2,25 .....

д) Растојање од Скопља до Прилепа је око 135 .....

ђ) Спајалица за папир је дугачка око 30 .....

3. На десној страни је приказан рецепт за припремање лепиња.

1 чаша брашна има масу 125 грама.

1 ml воде има масу 1 грам.

Израчунај укупну масу свих састојака у рецепту.

Решење запиши у килограмима.



Рецепт

150 g путера
175 g шећера
4 чаше брашна
25 g соли
14 g квасца
200 ml воде

4. Један новчић има масу од 2,268 грама.

Елена је нашла ташницу са 960 таквих новчића.

а) Израчунај укупну масу новчића у торбици у килограмима.

Заокругли решење на 2 децимална места.

Прво израчунај укупну масу у грамима.

б) Дебљина једног новчића је 1,35 милиметара.

Елена покушава да поређа новчиће један изнад другог.

Колика ће бити висина куле од новчића?

Запиши решење у метрима.

Прво израчунај укупну висину у метрима.



5. **а)** Израчунај колико центиметара има у 1 километру.

Прво претвори 1 km у метре.

б) Која мерна јединица је једнака 1000000000 милиграма.

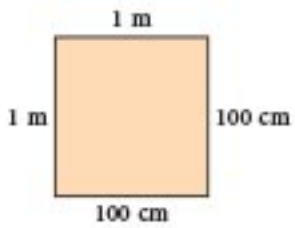
4.2 Површина

Узмимо квадрат чије су странице 1 m.

Његова површина је 1 m · 1 m = 1 m²

Можемо рећи да је страница квадрата 100 центиметара.

Тада је површина 100 cm · 100 cm = 10000 cm².



Значи, **1 m² = 10000 cm²**

Ако измеримо страницу квадрата у милиметрима, она је дугачка 1000 mm.

Тада је површина 1000 · 1000 = 1000000 mm²

Значи, **1 m² = 1000000 mm²**

Да бисмо претворили јединице мере за површину једну у другу, **коефицијент за претварање дужина треба да квадрирамо**.

На пример, 1 km = 1000 m.

Зато, 1 km² = 1000 m · 1000 m = 1000000 m².

Пример 1

Један лист папира има површину од 220 cm^2.

Претвори површину у mm^2.

Када претварамо јединице мере за површину једну у другу, квадрирамо коефицијент за претварање дужине.

$1\ cm = 10\ mm$ Ово је коефицијент за претварање дужине.

$1\ cm^2 = 10\ mm \cdot 10\ mm = 100\ mm^2$ Ово је коефицијент за претварање површине.

$220\ cm^2 = 220 \cdot 100\ mm^2 = 22000\ mm^2$

Пример 2



Једна парцела има површину 0,3 km^2.

Предузимач хоће да гради куће на тој парцели.

Свака кућа треба да се изгради на појединачним парцелама од 600 m^2.

а) Претвори 0,3 km^2 у m^2.

б) Израчунај колико укупно кућа може да се изгради на целој парцели.

а) $1\ km = 1000\ m$ Ово је коефицијент за претварање дужине.

$1\ km^2 = 1000\ m \cdot 1000\ m = 1000000\ m^2$ Ово је коефицијент за претварање површине.

$0{,}3\ km^2 = 0{,}3 \cdot 1000000\ m^2 = 300000\ m^2$

б) $300000 : 600 = 500$

Може да се изгради укупно 500 кућа на целој парцели.

Хектари

Мерење земљишта

Хектар је мерна јединица за мерење површине земљишта.

У највећем броју држава хектар се користи као јединица мере, али још увек има земаља у којима се користи и акра као јединица мере.

У прошлости се сматрало да једна акра одговара површини коју може изорати пар волова у току једног дана.



Једна акра приближно је једнака површини 0,4 хектара, односно око 4000 m^2.

Акре се још користе у неким земљама, међу којима су САД, Пакистан, Индија и Аустралија.

Површина од 0,3 km^2 у примеру 2 је довољна за 500 кућа.

Она показује да је 1 km^2 веома велика површина.

Постоји потреба за јединицу мере за површину између 1 m^2 и km^2.

Таква мерна јединица је **хектар (ha)**.

1 ha = 10000 m^2

Хектар се користи за површине њива, поља, паркова и слично.

Пример 3

Претвори.

а) 4,5 ha у m^2 **б)** 150000 m^2 у ha

а) 1 ha = 10000 m^2

4,5 ha = 4,5 · 10000 m^2 = 45000 m^2

б) 10000 m^2 = 1 ha

150000 $m^2 = \frac{150000}{10000}$ ha = 15 ha

Када претварамо већу мерну јединицу у мању, онда множимо.

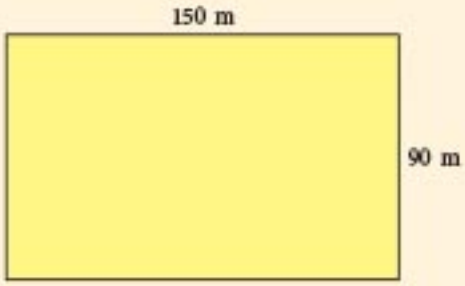
Када претварамо из мање мерне јединице у већу, онда делимо.

Пример 4

На цртежу је представљен план једне њиве.

а) Израчунај површину у m^2.

б) Израчунај површину у ha.



а) Површина правоугаоника = дужина · ширина

Површина = 150 · 90

Површина = 13500 m^2

б) 1 ha = 10000 m^2

13500 $m^2 = \frac{13500}{10000}$ ha = 1,35 ha

Задаци

1. Препиши и допуни следеће тврдње.

а) 1 m^2 = ... cm^2 **б)** 1 cm^2 = ... mm^2

в) 1 km^2 = ... m^2 **г)** 1 ha = ... m^2

2. Претвори у cm^2.

а) 3 m^2 **б)** 2,8 m^2 **в)** 400 mm^2 **г)** 1000 mm^2

д) 0,5 m^2 **ђ)** 20 mm^2 **е)** 100 m^2 **ж)** 32 mm^2

3. Претвори у mm^2.

а) $4\ cm^2$ **б)** $7{,}5\ cm^2$ **в)** $2\ m^2$ **г)** $6{,}8\ m^2$

4. Претвори у m^2.

а) $3\ km^2$ **б)** $8000\ cm^2$ **в)** $9000000\ mm^2$ **г)** $7{,}2\ km^2$

5. Претвори у m^2.

а) $4\ ha$ **б)** $12\ ha$ **в)** $7{,}5\ ha$ **г)** $2{,}35\ ha$

6. Претвори у хектаре.

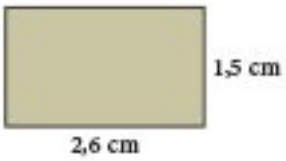
а) $60000\ m^2$ **б)** $150000\ m^2$ **в)** $85000\ m^2$ **г)** $5000\ m^2$

7. Израчунај површине правоугаоника.

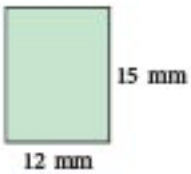
а)



б)



в)



Решења запиши у: **I** cm^2 **II** mm^2

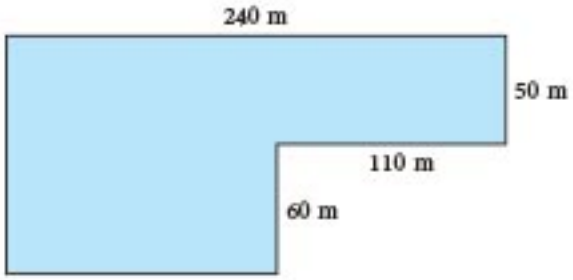
8. Једно игралиште има димензије 165 метара и 88 метара.

Израчунај површину игралишта у хектарима.

9. Узгајивач коња је израчунао да је свакој животињи потребно 4000 m^2 простора у пољу.

Израчунај колико коња би могло да се чува у пољу површине од 2 хектара.

10. На цртежу је представљена велика њива. Она се састоји од две правоугаоне њиве.



а) Израчунај површину њиве у m^2.

Подели њиву на два правоугаоника да израчунаш површину.

б) Претвори површину у хектаре.

11. Малом конзервом боје може да се офарба и дрвена површина од $1{,}5\ m^2$.

Селвер има 12 комада дрвета, и сваки комад има облик правоугаоника димензија 35 cm и 40 cm.

Пази, користе се различите мерне јединице. Дужине су у cm, а површина је у m^2.

а) Израчунај површину једног комада дрвета.

б) Израчунај да ли је једна конзерва боје довољна да се обоји 12 комада дрвета.

12. Лист А4 формата има површину која је половина површине листа А3 формата.

Лист А3 формата има површину која је половина површине листа А2 формата.

Лист А2 формата има површину која је половина површине листа А1 формата.

Лист A1 формата има површину која је половина површине листа A0 формата.

Лист A0 формата има површину 1 m^2.

а) Запиши као разломак површину листа A0 формата у односу на површину листа A4 формата.

б) Израчунај површину листа A4 формата у cm^2.

Прво претвори површину од A0 у cm^2.

13. Површина једне парцеле је 0,3 km^2.

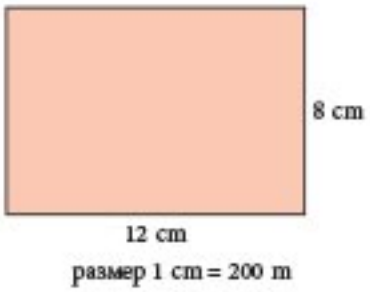
а) Претвори површину у хектаре.

Прво претвори у m^2.

б) Колико хектара има у 1 km^2?

14. Димензије шуме приказане на мапи су 12 cm и 8 cm.

Размера на мапи је 1 cm = 200 m.



а) Израчунај површину шуме на мапи у cm^2.

б) Израчунај стварну површину шуме у m^2.

Користи размеру да претвориш дужине у метре пре него израчунаш површину.

в) Решење запиши у хектарима.

4.3 Круг

Обим круга



У VIII разреду смо учили како се израчунава **обим** круга L, ако је познат пречник d или полупречник r.

$L = \pi d$ или $L = 2\pi r$

π (чита се „пи“) и приближно је 3,142.

На калкулаторима постоји дугме π које прецизније одређује вредност за π.

На калкулатору ће се највероватније добити 3,141592654.

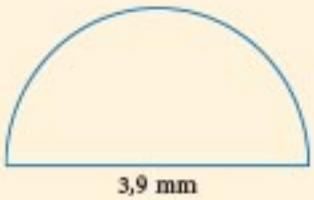
Постоје и још прецизнији калкулатори.

Пример 1

Израчунај обим 2Д-форми. Решења заокругли на 3 значајне цифре.

а) Круг **б)** Полукруг **в)** Четвртина круга







а) Полупречник је 4,6 cm.

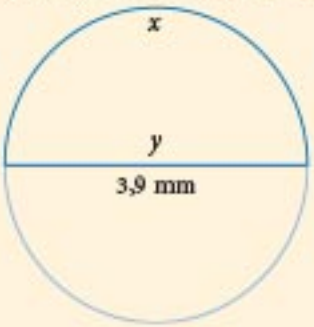
$L = 2 \cdot \pi \cdot 4{,}6$ Користимо формулу $L = 2\pi r$

$= 28{,}90265241$ Број π је израчунат калулатором.

$= 28{,}9$ cm Заокругљено на 3 значајне цифре.

б) 2Д-форма је састављена од половине круга и пречника тог круга.

Дужина и половина круга x једнака је половини обима целог круга.



$x = \frac{\pi \cdot 3{,}9}{2}$ Зато што је $\frac{\pi d}{2}$ половина обима круга.

$x = 6{,}126105675$ mm π је израчунато калкулатором.

Други део фигуре је пречник.

$y = 3{,}9$ mm

Укупни обим $= x + y$

$= 6{,}126105675 + 3{,}9$

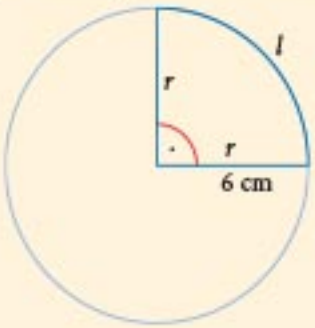
$= 10{,}02610567$

$= 10{,}0$ mm Заокругљено на 3 значајне цифре.

в) Ова фигура је четвртина круга.

2Д-форма је састављена од четвртине круга ограниченог са кружним луком и два полупречника.

Дужина кружног лука l је једнака четвртини обима круга.



$l = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6}{4}$ Зато што је $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4}$ четвртина обима.

$= 9{,}424777961$ cm π је израчунато калкулатором.

Обе дужи једнаке су полупречнику, $r = 6$ cm.

Укупни обим $= l + 2r$

$= 9{,}424777961 + 2 \cdot 6$

$= 21{,}424777961$

$= 21{,}4$ cm Заокругљено на 3 значајне цифре.

Површина круга

Формула за површину P круга са полупречником r је:

$P = \pi r^2$

Пример 2

Наћи површину за 2Д-форму из претходног примера.

а) Полупречник круга је 4,6 cm.

$P = \pi \cdot 4{,}6^2$ Од $P = \pi r^2$

$= 66{,}47610055$ π је израчунато калкулатором.

$= 66{,}48$ cm^2 Заокругљено на 2 децимална места.



Јединица мере је cm^2 зато што израчунавамо површину.

б) Површина полукруга је половина површине круга.

Пречник је 3,9 mm, а полупречник је $3{,}9 : 2 = 1{,}95$ mm.

$P = \frac{\pi \cdot 1{,}95^2}{2}$ Половина површине је $= \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

$= 5{,}972953033$ π је израчунато калкулатором.

$= 5{,}97$ mm^2 Заокругљено на 2 децимална места.



в) Површина четвртине круга је површина круга подељена са 4.

Полупречник је 6 cm.



$P = \frac{\pi \cdot 6^2}{4}$ Четвртина површине је $= \frac{\pi \cdot r^2}{4}$

$= 28{,}27433388$ π је израчунато калкулатором.

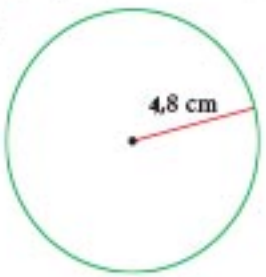
$= 28{,}27\ \text{cm}^2$ Заокругљено на 2 децимална места.

Задаци

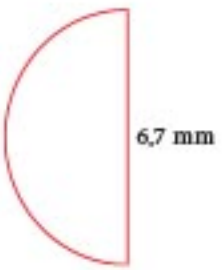
У следећим задацима решења заокругли на 3 значајне цифре.

1. Израчунај обим 2Д-форми:

а)



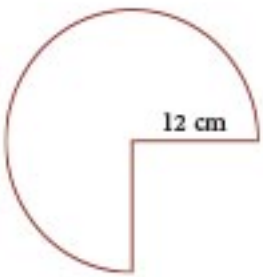
б)



в)

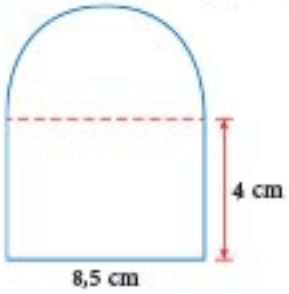


г)



2. Израчунај површину сваке 2Д-форме из претходног задатка:

3. Сложена 2Д-форма је састављена од правоугаоника и полукруга.



Израчунај: **а)** површину 2Д-форме

б) обим 2Д-форме.

4. Једна башта има облик квадрата чије су странице 12 метара.

Травњак је кружног облика и додирује све ивице. На сваком углу је цветна алеја. На цртежу је приказан план баште.



а) Израчунај површину целе баште.

б) Израчунај површину травњака.

в) Израчунај површину једне цветне алеје.

5. Израчунај пречник кружнице обима:

а) 25 cm **б)** 76 mm **в)** 5 m

6. Израчунај полупречник кружнице обима:

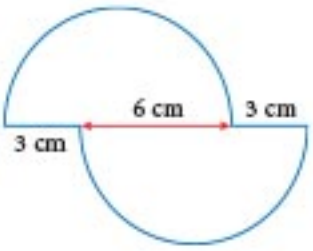
а) 65 cm **б)** 5,9 mm **в)** 2,5 m

7. Лого једне компаније чине два полукруга.

а) Израчунај површину логоа.

б) Израчунај обим логоа.

2Д-форма се састоји од два полукруга.

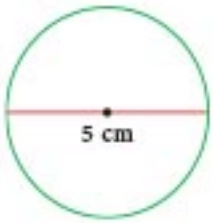


Треба да сабереш дужине правих линија са дужинама лукова.

8. Све три 2Д-форме приказане доле имају једнаке обиме.

Израчунај дужине страница означене словима.

Прво израчунај обим круга. Затим га користи за израчунавање обима других 2Д-форми тако што ћеш саставити једначину са датом непознатом дужином.







Цртежи нису у реалној величини

9. Један круг има површину 14,8 cm^2.

Израчунај полупречник круга.

Реши једначину $r^2 = 14,8$

10. На слици је приказан кружни кратер на површини Месеца.

Направљена је процена да је обим кратера 120 km.

Израчунај површину која је покривена кратером.

Прво израчунај полупречник кратера.



Задаци за понављање

1. Једна грађевинска цигла има масу од 2,7 kg.

Израчунај масу 840 цигала.

Решење запиши у тонама.



2. Зорица има бокал са 3 литара сока од наранџе.

Израчунај колико се чаша од по 180 милилитара могу напунити соком.

3. Марко има комад дрвета који је дугачак 2,8 метара.

Жели да га подели на мале комадиће дужине по 12 центиметара.

Израчунај на колико малих комадића може пресећи дрво.

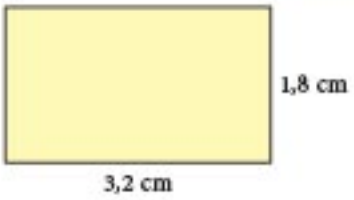
4. Новчић од 1 денара има масу 5,10 грама.

Стефан има касицу у којој има 500 денара у монетама од по 1 денар.

Израчунај у килограмима укупну масу монета из касице.

5. **а)** Израчунај површину правоугаоника у cm^2.

б) Израчунај површину у mm^2.



6. Претвори следеће површине у cm^2.

а) 2 m^2 **б)** 200 mm^2

в) 6,5 m^2 **г)** 5000 mm^2

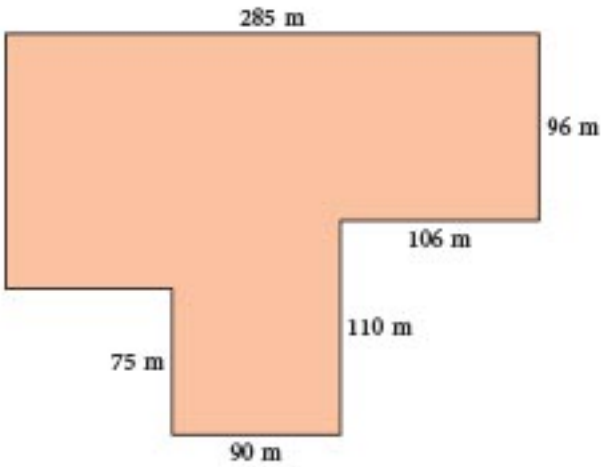
7. Претвори у m^2.

а) 4 km^2 **б)** 80000 cm^2

в) 9,6 km^2 **г)** 5000000 mm^2

8. Фудбалско игралиште има димензије 195 метара и 96 метара. Израчунај његову површину у хектарима.

9. На цртежу је приказан план грађевинског земљишта.

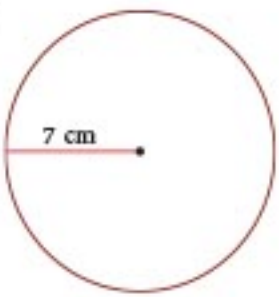


а) Израчунај површину земље у m^2.

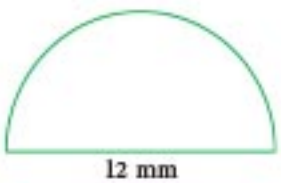
б) Претвори решење у хектаре.

10. Израчунај обиме фигура.
Заокругли решење на 3 значајне цифре.

а)



б)

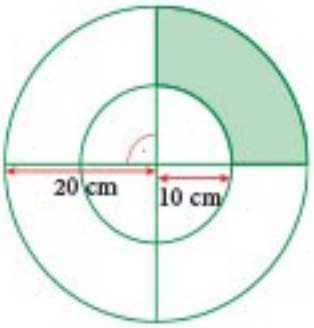


в)



11. Израчунај површину 2Д-форми из претходног задатка.

12. Сложена 2Д-форма је састављена од два круга са заједничким центром, један са полупречником од 20 cm, а други са полупречником од 10 cm.



Она је подељена на четири четвртине.

Израчунај површину обојеног дела.

Одузми $\frac{1}{4}$ површине малог круга од $\frac{1}{4}$ површине великог круга.

5 Рад са подацима и решавање проблема

Наставни циљеви

- Подстицање на истраживање коришћењем статистичких метода; идентификовање скупа потребних података и начин њиховог прикупљања; одређивање величине узорка и степен тачности.
- Идентификовање примарних или секундарних извора одговарајућим подацима.
- Израђивање, тестирање и пречишћавање прикупљених података.
- Уочавање и оцена ефикасности различитих стратегија и приступа и побољшавање поступка решавања проблема.
- Израда и употреба инструмената за прикупљање података и упитника за једноставну анкету.
- Прецизно идентификовање, организовање, представљање и тумачење информација у писменом облику, табеларно, графички и дијаграмом.
- Прикупљање и сређивање дискретних и континуираних података; избор истих класних интервала кад је то потребно.
- Избор, цртање и тумачење дијаграма и графика укључујући:
  - дијаграме фреквенција за дискретне и континуиране податке;
  - линијске графике за временски период;
  - дијаграм са тачкама како би се развило разумевање корелације;
  - следбени стабло-лист дијаграми. Поређење две или више подела; доношење закључака коришћењем форме поделе или одговарајуће статистике.
- Израда статистичких израчунавања и избор статистике која је највише повезана са проблемом.
- Повезивање резултата и закључака са првобитним питањем.

5.1 Планирање истраживања

Избор питања за истраживање

Пре него што стварно почнемо статистичко истраживање, потребно је да добро размислимо како ћемо формулисати питање или питања која ћемо постављати. То ће нам помоћи да одлучимо које податке прикупљамо и како да их прикупимо.

Морамо бити сигурни да је питање јасно.

Увек је боље да поставимо два једноставнија питања него да их комбинујемо у једном сложенијем питању.

Пример 1

Јована хоће да уради статистичко истраживање у вези са фудбалом.

Предложи:

а) два питања која она треба да постави,

б) податке потребне за свако од два питања.

Питање 1

а) Јована би могла да пита: „Да ли фудбалски тимови постижу више голова када има више публике на трибинама?“

б) Њој би био потребан број присутних и крајњи резултат за одређени број фудбалских утакмица.

Питање 2

а) Она би могла да пита: „ Да ли је голман виши од осталих играча?“

б) Биле би јој потребне информације о висинама играча.

Пример 2

Симон хоће да направи статистичко истраживање о годишњим одморима.

Предложи:

а) два питања које он треба да постави,

б) податке потребне за свако питање.

Питање 1

а) Симон би могао да пита: „ Да ли су годишњи одмори у топлијим крајевима скупљи од оних у хладнијим крајевима?“

б) Њему би биле потребне просечне температуре у неколико земаља, као и цене боравка у тим земљама.

Питање 2

а) Симон би могао да постави питање: „Да ли људи више воле да се одмарају у топлим крајевима?“

б) Он би требало да пита неколико људи где више воле да иду на одмор и шта је разлог њиховог одласка тамо.

Извори података

Можемо користити **примарне податке**. То су подаци које сами прикупљамо.

Можемо користити **секундарне податке**. То су подаци које је већ неко други прикупио.

Постоји много извора секундарних података. Многе владе објављују националне статистике. На интернету има много доступних база података и алманаха (алманах је референтна књига која се обично објављује једном годишње).

Одређивање узорка

Групу која је предмет интересовања у неком истраживању називамо **популација.**

Можда неће бити могуће да поставимо питање сваком човеку из популације. Када бирамо само део популације, тај део називамо **узорак.**

Око 10% популације је најчешће разумна величина узорка. Обично је довољан минимум од тридесетак особа.

Методе за прикупљање података

Када треба сами да прикупимо податке, онда спроводимо **истраживање.**

Људима можемо да поставимо питање помоћу **упитника** или путем **интервјуа.**

Упитник је обично одштампан на папиру и испитаници сами одговарају на питања у њему.

Код интервјуа, ми директно постављамо питања.

Када је потребно записивати резултате о неком дешавању, треба спровести експеримент или бележити **запажања.**

Када бележимо мерења, потребно је да будемо сигурни да користимо одговарајући **степен тачности.** На пример, ако меримо време које је потребно да би се истрчало 100 метара и ако време записујемо заокругљено на најближу секунду, може се десити да већи број буде исти. Мерење десетог дела секунде био би најбољи степен тачности.

Пример 3

Како би прикупио/прикупила податке да одговориш на следећа питања?

а) Која је најпопуларнија врста музике међу ученицима у једном разреду?

б) Која је боја аутомобила најпопуларнија?

в) Да ли је вероватније да ће парче хлеба намазано путером пасти на намазану страну ако нам испадне?

а) Урадићемо истраживање.

Могли бисмо питати ученике из разреда. Можемо интервјуисати сваког ученика или свима дати да попуне претходно припремљен упитник.

б) Записиваћемо посматрања.

Могли бисмо записивати боје аутомобила паркираних на школском паркингу или док пролазе испред улаза у школу.

в) Урадићемо експеримент.

Могли бисмо испустити парче хлеба намазано путером и записивати да ли оно пада на намазану страну или не пада.

Пример 4

Јована би хтела да открије висину двадесет чланова њеног одбојкашког клуба.

а) Да ли она треба да пита сваког члана клуба за висину или да изабере узорак?

б) Колики степен тачности треба да користи Јована?

а) Јована треба да пита сваког члана клуба зато што има двадесет чланова.

б) Мерење заокругљено на најближи центиметар биће довољно.

Задаци

1. Предложи једно питање које би могло да се постави, као и податке који су потребни за истраживање у вези са:

а) тенисом,

б) куповином музичких инструмената,

в) временом,

г) куповину аутомобила од стране осамнаестогодишњака.

2. Да ли би користио/користила примарне или секундарне податке за истраживање у вези са:



а) висином ученика у свом разреду,

б) навикама о рециклирању у твом граду односно селу,

в) навикама о рециклирању у твојој држави,

г) површинама држава у свету,

д) временским условима.

3. Изабери истраживање, експеримент или посматрање да би открио/открила који би метод био најбољи за прикупљање података о:

а) откривању тога која је врста филма најпопуларнија међу ученицима у твом разреду,

б) истраживању броја људи који се возе аутомобилима,

в) истраживању броја кућних љубимаца које људи имају у твом граду односно селу,

г) откривању да ли тинејџери имају брже рефлексе од одраслих особа,

д) откривању да ли је једно ђубриво боље од другог,

ђ) откривању да ли је нови базен за пливање бољи од старог,

е) откривању колико људи користи нови базен за пливање сваког дана.

4. Менаџер једног фудбалског клуба би хтео да открије да ли навијачи желе угоститељске услуге за време утакмица.

а) Објасни зашто менаџер треба да пита одређени узорак навијача.

б) Колико навијача треба да пита менаџер?

5. Једна компанија производи 1000 сијалица сваког дана.

Менаџер једне компаније хоће да тестира сијалице да би открио колики је век трајања једне сијалице.

а) Наведи два разлога зашто компанија треба да користи узорак.

б) Колико сијалица треба да обухвати узорак?

в) Предложи степен тачности који може да се користи при мерењу рока трајања сијалица.

6. Колики би степен тачности био адекватан за истраживање:

а) времена које једна група људи троши на вежбање,

б) времена које је потребно олимпијском атлетичару да истрчи 100 метара,

в) растојања између два града

г) количине воде која се свакодневно троши у породицама.



7. Марина је власница салона лепоте у једном великом граду.

Она размишља да отвори још један такав салон у истом граду.

У групама по двоје или троје дискутујте, а затим запишите одговоре у вези са следећим:

а) Предложите питање које она треба да постави.

б) Који подаци су јој потребни да би донела праву одлуку?

в) Да ли су ти подаци примарни или секундарни?

г) Који метод прикупљања треба да користиш да добијеш податке?

д) Које би друге факторе Марина могла да узме у обзир?

Не заборави да је град велики, па има много људи који живе или раде у њему.

8. Кире хоће да открије да ли његов омиљени кошаркашки клуб напредује.

У групама по двоје или троје, дискутујте а затим запишите одговоре у вези са следећим:

а) Предложите питање које Кире треба да постави.

б) Који подаци су му потребни?

в) Да ли су ти подаци примарни или секундарни?

г) Које друге факторе бисмо могли узети у обзир?

Постоје две групе људи који могу да буду укључени – гледаоци и играчи. Обе групе треба узети у обзир.

5.2 Инструмент за прикупљање података

Први упитник

Сер Френсис Галтон је рођен у Бирмингему 1822. године.

Увео је у употребу истраживања и упитнике за прикупљање информација у грађанским заједницама.

Упитници и истраживања данас имају врло широку примену.

Они дају врло корисне информације које могу да помогну у планирању и креирању политика.



Инструменти за прикупљање података треба да буду једноставни за коришћење и да омогућавају прикупљање тражених података.

Када правимо сопствени инструмент за прикупљање података, добро би било да га тестирамо пре употребе како бисмо били сигурни да је једноставан за употребу и да прикупља баш податке који су нам потребни.

- Лак је за коришћење.
- Реално сакупља податке који су нам потребни.

За прикупљање података најчешће користимо табелу фреквенција.

- Ако постоји много различитих вредности, добро је да их поделимо у групе.
- Групе треба да буду једнаке.
- Пет до осам група је довољно. Коришћење више од осам група даје превише детаља, а код мање од пет група нема довољно детаља.
- Групе морају бити формиране тако да се у њих могу записати највећа и најмања вредност.

Када одређујемо групе, морамо пазити:

- да нема празнина
- да нема преклапања.

Пример 1

Мустафа прикупља информације о износу џепарца који свакодневно добијају ученици из његовог разреда.

Очекује да најмања вредност буде 30, а највећа 210 денара.

Направи инструмент за прикупљање података који би Мустафа могао да користи.

Ова табела фреквенција би била најадекватнија.

Џепарац, денари	Цртице	Фреквенција
$0 < p \leq 50$		
$50 < p \leq 100$		
$100 < p \leq 150$		
$150 < p \leq 200$		
$200 < p \leq 250$		

Постоји још много других група које могу да се користе.

На пример, $20 < p \leq 70$, $70 < p \leq 120$, али лакше је да радимо са бројевима у групама који су дати у табели.

Пример 2

Никола прикупља информације о висини ученика у његовом разреду.

Он је одлучио да користи следећу табелу.

Висина, cm	Цртице	Фреквенција
140-150		
150-160		
165-180		

Забележи четири примедбе на табелу.

Пример: Постоји празно поље зато што нема где да се упише висина од 162 cm.

Постоји преклапање зато што би висина од 150 cm припадала у две групе.

Класе (групе) немају исту величину.

На основу ове три групе не може да се прикупи довољно података.

Упитници

Питања треба да буду једноставна за разумевање, иначе нам одговори неће дати потребне информације.

На пример, на питање: „Колико често вежбате?“ неки испитаници би могли да одговоре: „Много“, а други „Неколико пута недељно“.

Питања не смеју бити увредљива.

На пример, многи људи не желе да открију своје године. Зато је најбоље понудити рангове узраста, као на пример, од 20 до 29 година, од 30 до 39 година итд.

Питања не смеју да наводе на одређени одговор.

На пример питање: „Шта мислиш о изванредном новом базену за пливање у...?“ навело би многе испитанике да се сложе. Циљ питања јесте да открије мишљење испитаника, а не да их наводи да се сложе.

Људи не желе да троше много времена на одговарање на питања из упитника. Потребно је да се користе питања која брзо могу да се одговоре. Питања у облику Да/Не и питања са пољем за потврду су брза за одговоре.

Поља за потврду не треба да

- имају празнине
- нити преклапања
- а пожељно је да укључе цео ранг одговора
- да буду у „равнотежи“ тако што ће имати исти број позитивних и негативних одговора о мишљењима.

Обично се упитници тестирају пре употребе.

Циљ тестирања је да се провери:

- да ли су упитници разумљиви
- да ли обезбеђују потребне информације.

Пример 3

Андреј хоће да зна колико времена ученици из његовог разреда проводе гледајући телевизију.

Он разматра два могућа питања:

I Колико гледаш телевизију?

II Колико часова проводиш гледајући телевизију?

а) Пронађи по једну примедбу за свако од ових питања.

б) Запиши боље питање које би Андреј могао да искористи.

а) I Није јасно која се врста одговора тражи. Неки ученици могу да одговоре „много“ или „не много“.

II Нема временског периода у питању. Неки одговори ће се можда односити на једно вече, други на једну недељу или на други временски период. Неки можда опет нису запамтили тачно.

б) Колико си часова синоћ гледао телевизију.

- ❑ Уопште нисам.
- ❑ Мање од једног часа
- ❑ Од једног до два часа
- ❑ Два часа и више

Задаци

1. Елена хоће да зна колико се људи вози у аутомобилима који пролазе поред школе.

а) Осмисли инструмент за прикупљање података који би она могла да искористи за прикупљање ових података.

б) Ако то можеш да урадиш безбедно, под надзором свог наставника, попуни формулар података бројањем људи у аутомобилима, који пролазе испред твоје школе у одређеном временском периоду.

2. Невена хоће да зна да ли у њеној омиљеној телевизиској емисији има више реклама него у другим емисијама.

а) Осмисли инструмент за прикупљање података који би могла да искористи.

б) Изабери неколико телевизијских емисија и попуни формулар са подацима упоређујући број реклама у њима са бројем реклама у твојој омиљеној телевизијској емисији.

3. Миле узгаја две различите сорте пасуља у својој башти.

Он жели да одреди која сорта даје више плодова по стабљици.

Он зна да ниједна стабљика не даје мање од 9 нити више од 51 зрна пасуља.

Употреби одговарајуће групе, као и то да постоје две сорте пасуља.

Састави инструмент за сакупљање података које би могао/могла да искористиш.

4. Катерина је саставила овај инструмент за прикупљање података да би истражила колико често људи користе локални аутобуски превоз.

Колико често користиш локални аутобус?

- ❑ Никада
- ❑ Понекад
- ❑ Често
- ❑ Увек

а) Запиши две неправилности за овај инструмент за прикупљање података.

б) Састави бољи инструмент за прикупљање података који би могла да искористи Катерина.

5. Менаџер забавног парка жели да зна шта мисле посетиоци о опреми у парку.

За своје истраживање поставио је следеће питање:

Шта мислиш о опреми у забавном парку?

- ❑ Одлична
- ❑ Врлодобра
- ❑ Добра
- ❑ Задовољава
- ❑ Слаба

а) Нађи једну примедбу у делу са одговорима.

б) Запиши боље питање које би могло да се икористи у истраживању.

6. Јована хоће да зна колико често тинејџери у њеном граду користе локални базен за пливање.

Запиши адекватна питања која би могла да се искористе за упитник.

7. Сузана истражује масу младих парадајза у свом стакленику.

Она је добијене податке записала у следећу табелу.

Маса, m (g)	Цртице	Фреквенција
5-10		
10-20		
25-30		
30-50		

Нађи две неправилности у табели.

8. Оливер мери висине неких биљака у својој башти.

Висине у центиметрима су:

23 45 43 31 50 49 12 32 59 18

16 32 37 38 61 45 37 14 26 53

Запиши ове висине у табели фреквенција користећи адекватне групе.

Ако ти је потребно можеш користити и колону за цртице.

9. У једном ресторану је почео да ради нови менаџер. Он хоће да зна колико често људи који живе у близини једу изван куће и коју врсту хране једу.

У групама по двоје или троје, дискутујте о питањима која би могла да се поставе.

Запиши неколико питања која би могао/могла да укључиш у упитник.

Покушај да не постављаш много питања зато што се дугачки упитници често не попуњавају до краја.

10. У једном граду се отвара нови спортски центар.

Менаџер хоће да постави опрему коју користи локално становништво. Он се служи упитником да би открио шта они користе.

У групама по двоје или троје, дискутујте о томе које информације треба да зна менаџер.

Запиши неколико питања која би могао/могла да укључиш у упитник.

Корисно би било да откријеш да ли су испитаници заинтересовани за вежбање или за гледање спортских активности, као и то који су спортови најтраженији међу становништвом.

11. Александар истражује колико често људи иду у биоскоп.

Једно од његових питања гласи: „Колико често идете у биоскоп?“

а) Пронађи две неправилности у овом питању.

б) Запиши боље питање које би могло да се користи.

12. Виолета истражује дужине песама у својој колекцији на компакт-дисковима.

а) Направи инструмент за прикупљање података који би могла да користи Виолета.

б) Попуни инструмент за прикупљање података за неколико твојих компакт-дискова.

Користи одговарајуће класе.

5.3 Стабло-лист дијаграми

Стабло-лист дијаграме користимо да бисмо организовали податке поређане по величини.

Стабло је лево од вертикалне линије.

Сваки лист је увек представљен једном цифром.

Листови у сваком реду морају бити поређани по величини.

Листове записујемо у више редова један испод другога у вертикалним линијама.

Увек морамо задати кључ за тумачење дијаграма.



Пример 1

Резултати теста из математике за групу од 23 дечака су:

41, 10, 23, 15, 52, 30, 26, 29, 58, 42, 19, 49, 38, 37, 25, 31, 55, 42, 24, 43, 35, 34, 25

а) Нацртај стабло-лист дијаграм да би приказао/приказала ове податке.

б) Запиши медијану за резултате теста.

в) Израчунај ранг резултата теста.

а)

1	0 5 9
2	3 4 5 5 6 9
3	0 1 4 5 7 8
4	1 2 2 3 9
5	2 5 8

кључ: 5|2 представља 52

б) Медијана је средишња вредност из низа података поређаних по величини.

Има 23 вредности. Вредност у средини је дванаеста.

Медијана је 34.

в) Ранг = највећа вредност – најмања вредност = 58 − 10 = 48.

Следбени стабло-лист дијаграми

Следбени стабло-лист дијаграми се користе при раду са две поделе, на пример, са мушком и женском популацијом.

Са тим дијаграмима је могућа брза подела једноставна за упоређивање.

Стабло је у средини.

Листови се налазе са обе стране стабла.

Треба означити обе стране дијаграма.

Листови са леве стране стабла су у обрнутом редоследу тако што је најмањи најближе до стабла.

Кључ приказује стабло и два листа.

Пример 2

Резултати теста из математике за групу од 25 девојчица су:

45, 20, 37, 57, 12, 43, 53, 57, 47, 57, 44, 11, 24, 36, 44, 31, 25, 50, 42, 40, 55, 25, 28, 58, 48

а) Додај резултате за девојчице у стабло-лист дијаграм из претходног примера да формираш следбени стабло-лист дијаграм.

б) Одреди медијану резултата из теста који су радиле девојчице.

в) Израчунај ранг за тест који су радиле девојчице.

г) Упореди резултате теста који су радиле девојчице са оним који су радили дечаци.

а)

девојчице								дечаци						
					2	1	1	0	5	9				
			8	5	5	4	0	2	3	4	5	5	6	9
					7	6	1	3	0	1	4	5	7	8
8	7	5	4	4	3	2	0	4	1	2	2	3	9	
	8	7	7	7	5	3	0	5	2	5	8			

кључ: 0|5|2 значи 50 за девојчице и 52 за дечаке

б) Медијана је 43.

в) Ранг = 58 − 11 = 47.

г) У просеку, девојчице имају боље резултате на тесту него дечаци зато што имају вишу медијану.

Резултати девојчица и дечака имају готово исти ранг.

Из облика стабло-лист дијаграма види се да су резултати теста дечака углавном у средини ранга оцена. Највећи број резултата оцена девојчица се налази између 40 и 60. То значи да оне у целини гледано имају боље резултате.

Задаци

1. Следбени стабло-лист дијаграм приказује број поена освојених у кошарци, који су постигла два играча у последњој сезони.

Иван						Андреј							
					1	9							
		9	8	7	3	2	1	7					
8	7	6	5	4	2	0	3	2	5	6	8	8	
		8	5	4	2	1	4	0	2	4	5	5	6	8
			5	3	1	0	5	1	3	3	9			
							6	2	3					
						1	7							

кључ: 3|2|1 значи да је Иван имао 23 поена, а Андреј 21 поен.

а) Колики је најмањи број поена које је постигао Андреј?

б) Колики је највећи број поена које је постигао Андреј?

в) Израчунај ранг за Андрејеве поене.

г) Израчунај ранг за Иванове поене.

д) Одреди медијану за Андрејеве поене.

ђ) Одреди медијану за Иванове поене.

е) Ко има већу медијану? Према медијани, шта се може рећи о броју њихових поена?

ж) Ко има већи ранг? Према рангу, шта се може рећи о броју њихових поена?

2. Поени на тесту ученика из два разреда су следећи:

Разред А:

71, 51, 25, 31, 38, 47, 53, 30, 34, 43, 59, 60, 35, 42, 45, 56, 63, 40, 47, 56, 64

Разред Б:

28, 46, 59, 66, 73, 19, 30, 46, 63, 64, 37, 43, 58, 62, 69, 74, 23, 34, 59, 60, 70, 41, 55, 68, 75

а) Нацртај следбени стабло-лист дијаграм да би приказао/приказала резултате са теста ученика из оба разреда.

б) За разред А одреди:

i медијану

ii ранг

в) За разред Б одреди:

i медијану

ii ранг

г) Који разред има већу медијану? Према медијани, шта се може рећи о резултатима теста?

д) Који разред има већи ранг? Према рангу, шта се може рећи о резултатима теста?

3. Филип је записивао бројеве аутомобила на паркингу сваког дана у 9 часова пре подне и у 17 часова током 27 дана.

Добијени су следећи подаци:

У 9 сати:

05, 25, 57, 43, 30, 34, 34, 45, 53, 65,

38, 23, 76, 58, 40, 62, 18, 37, 45, 52,

16, 09, 34, 32, 50, 43, 22

У 17 часова:

09, 38, 43, 57, 54, 31, 77, 57, 68, 62,

58, 43, 57, 42, 37, 31, 30, 40, 60, 52,

58, 52, 39, 32, 30, 72, 62

а) Нацртај следбени стабло-лист дијаграм да би приказао/приказала податке.

б) Одреди медијану и ранг броја аутомобила на паркингу у 9 сати.

в) Одреди медијану и ранг броја аутомобила на паркингу у 17 часова.

г) Упореди број аутомобила на паркингу у 9 сати и у 17 сати.

4. Фармер је мерио масе у грамима две сорте кромпира.

Сорта А:

36, 44, 49, 54, 57, 68, 82, 34, 45, 57, 58, 63, 74, 79, 31, 48, 53, 67, 69, 81, 30, 48, 51, 66, 71

Сорта Б:

75, 76, 81, 39, 43, 56, 63, 75, 40, 49, 59, 66, 31, 47, 61, 65, 56, 59, 65, 73, 76, 80, 64, 67, 72

Цртањем следбеног стабло-лист дијаграма упореди поделе.

5.4 Статистике за веће групе података

Просек

Аритметичку средину, односно просек израчунавамо следећом формулом:

$$\text{Просек} = \frac{\text{збир свих вредности података у групи}}{\text{укупан број података у групи}}$$

Велике групе података обично групишемо у класе.

Како не знамо тачне вредности, правимо **процену класе** одређивањем средње вредности сваке класе.

Пример 1

У датој табели фреквенција приказана су времена путовања аутобусом.

Направи процену просека времена путовања аутобусом.

Време, t (минути)	Фреквенција
$5 < t \leq 10$	4
$10 < t \leq 15$	18
$15 < t \leq 20$	32
$20 < t \leq 25$	14
$25 < t \leq 30$	7

Време, t (минути)	Фреквенција, f	Средња вредност класе, m	$f \cdot m$
$5 < t \leq 10$	4	7,5	30
$10 < t \leq 15$	18	12,5	225
$15 < t \leq 20$	32	17,5	560
$20 < t \leq 25$	14	22,5	315
$25 < t \leq 30$	7	27,5	192,5
	Укупно 75		Укупно 1322,5

$$\text{Просек} = \frac{\text{збир вредности у } f \cdot m \text{ колони}}{\text{збир фреквенција}} = \frac{1322{,}5}{75} = 17{,}6 \text{ до 1 д.м.}$$

Медијана

У групи са непарним бројем података поређаних по величини, медијана је податак у средини. У групи са парним бројем података поређаних по величини, медијана је аритметичка средина средња два члана.

Код груписаних података можемо да одредимо групу (или класу) која садржи медијану.

Пример 2

Направи процену медијане за времена путовања аутобусом за податке из примера 1.

Медијана је вредност у средини.

То је тридесет и осма (38) вредност у табели.

Када су времена подељена по величини:

Време, t (минути)	Фреквенција
$5 < t \leq 10$	4
$10 < t \leq 15$	18
$15 < t \leq 20$	32
$20 < t \leq 25$	14
$25 < t \leq 30$	7

Прва четири времена су 10 минута или мања.

Прва 22 времена су 15 минута или мања.

Прва 54 времена су мања или једнака на 20 минута.

Тридесет осмо време је у класи $15 < t \leq 20$.

Мод

Мод је вредност која се најчешће јавља у једној групи података.

Можемо да одредимо класу коју садржи мод, односно модалну класу за груписане податке.

Пример 3

Нађи модалну класу за времена путовања аутобусом у примеру 1.

Модална класа је класа са највећом фреквенцијом.

Модална класа је $15 < t \leq 20$.

Време, t (минути)	Фреквенција
$5 < t \leq 10$	4
$10 < t \leq 15$	18
$15 < t \leq 20$	32
$20 < t \leq 25$	14
$25 < t \leq 30$	7

Задаци

1. Табелама су приказани груписани подаци.

За сваку табелу:

а) Одреди модалну класу;

б) Одреди класу која садржи медијану;

в) Направи процену просека користећи средње вредности класа.

А)

Класа	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49
Фреквенција	4	8	12	6	2

Б)

Класа	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
Фреквенција	4	18	16	8	3	1

2. Табела приказује висине у центиметрима за групу ученика.

а) Направи процену просека висина ученика, користећи средње вредности класа.

б) Одреди класу која садржи медијану висина ученика.

Висина, h (cm)	Фреквенција
$150 < h \leq 160$	14
$160 < h \leq 170$	48
$170 < h \leq 180$	60
$180 < h \leq 190$	5

3. У табели су приказане масе групе беба.

а) Направи процену просека маса беба, користећи средње вредности класа.

б) Одреди класу која садржи медијану маса беба.

Маса, m (kg)	Фреквенција
$0 < m \leq 2$	8
$2 < m \leq 4$	40
$4 < m \leq 6$	29
$6 < m \leq 8$	2

4. У табелама су приказана времена за која две групе ученика решавају слагалицу.

Група А	
Време, t (минути)	Фреквенција
$0 < t \leq 10$	4
$10 < t \leq 20$	12
$20 < t \leq 30$	25
$30 < t \leq 40$	18
$40 < t \leq 50$	11

Група Б	
Време, t (минути)	Фреквенција
$0 < t \leq 10$	3
$10 < t \leq 20$	10
$20 < t \leq 30$	20
$30 < t \leq 40$	12
$40 < t \leq 50$	4

а) Направи процену просека времена за сваку групу ученика.

б) Која група у целини брже решава слагалицу? Објасни свој одговор.

5. Теодора каже да девојчице имају крупнији рукопис од дечака.

Она је замолила неколико ученика да напишу реченицу: „На једној ливади има много разнобојног цвећа“.

Затим су измерене све реченице.

Резултати су приказани у табели.

Девојчице	
Дужина, l (cm)	Фреквенција
$14 < l \leq 16$	4
$16 < l \leq 18$	8
$18 < l \leq 20$	32
$20 < l \leq 22$	16
$22 < l \leq 24$	12

Дечаци	
Дужина, l (cm)	Фреквенција
$14 < l \leq 16$	4
$16 < l \leq 18$	9
$18 < l \leq 20$	29
$20 < l \leq 22$	14
$22 < l \leq 24$	4

Да ли је Теодора у праву? Покажи како си донео/донела одлуку.

Користи процене просека о дужини рукописа дечака и девојчица.

6. Али мери време t чекања у минутима купаца испред једне касе у супермаркету.

Његови резултати су приказани у табели.

Време, t (минути)	$0 < t \leq 1$	$1 < t \leq 2$	$2 < t \leq 3$	$3 < t \leq 4$	$4 < t \leq 5$	$5 < t \leq 6$	$6 < t \leq 7$
Фреквенција	8	18	30	20	10	8	6

Од руководиоца супермаркета се тражи да запосли више људи на касама ако је просечно „време чекања“ у реду на каси дуже од 3 минута. Ако је просечно време чекања мање од 3 минута, руководилац нема потребе да запосли никога.

а) Али каже: „Просечна вредност показује да је потребно да се запосли још људи.“ Покажи како просек оправдава Алијева тврђења.

б) Руководиоц каже: “Просечна вредност показује да нису потребна запошљавања” Покажи како медијана оправдава став руководиоца.

Избор најадекватније статистике у групи података

Важно је да знамо да одредимо која ће статистичка вредност (статистика) најбоље представити групу података.

Изабрана статистика треба најбоље да представи карактеристике целе групе података.

У следећој табели су приказане предности и недостаци за три познате статистичке вредности.

Статистика	Предности	Недостаци
Мод	Увек је једна од вредности података. Јединствену статистику можемо одредити нумеричким подацима.	Понекад нема мода. Може да постоји више мода.
Просек	За његово израчунавање се користе све вредности.	На његову вредност могу да утичу мали број врло великих или врло малих вредности. Мало је вероватно да ће бити једна од вредности података. Може бити потребно време да би се израчунало.
Медијана	На њену вредност не утиче да ли су подаци врло велике или врло мале вредности.	Може бити потребно више времена за израчунавање зато што морамо прво да поређамо податке.

Пример 4

Продаје се неколико старих аутомобила.

Дате су њихове цене у денарима:

90000, 105000, 104000, 90000, 92000, 201000, 95000

а) Нађи мод, просек и медијану цена.

б) Одреди и објасни која од ових статистика најбоље представља цене.

а) Мод је 90000.

Медијана је 95000.

Просек је 111000.

б) Мод је најнижа цена, тако да она не представља прецизно податке.

Просек је виши од свих цена осим од највише цене, па он не представља прецизно податке.

Вредност медијане се налази у интервалу датих података, према томе, медијаном се може најбоље представити ова група података.

Пример 5

Јован добија 200 денара џепарца седмично.

Он је направио истраживање да би открио колико џепарца добијају деца у његовом насељу.

Сазнао је да је:

просек 270 денара

медијана 260 денара

мод 250 денара

Јован каже: „Треба да добијем 70 денара више да бих постигао недељни просек џепараца као остала деца.“

Његова мама каже: „Даваћу ти 50 денара више да би достигао недељни просек џепараца као већину деце.“

а) Објасни зашто се слажеш са Јованом.

б) Објасни зашто се слажеш са његовом мамом.

в) Предложи друге ствари које Јован треба да узме у обзир.

а) Просек је 70 денара већи од џепарца који добија Јован.

б) Мод је 50 денара већи од џепарца који добија Јован.

в) Више ствари треба узети у обзир, на пример, да ли је Јован спреман да помогне око кућних задатака или да ли Јован мора да купује компјутерске игрице. Треба узети у обзир и величину области у којој Јован прикупља податке, као и број упитане деце – мањи узорак неће дати веродостојне статистике.

Задаци

1. Којом статистиком ће бити најбоље представљена свака од датих група?

а) Просечна величина ципела ученика у твом разреду.

б) Просечан број деце у свакој породици у једном селу.

в) Оцене са такмичења у плесу да би се добила просечна оцена.

г) Просечна висина ученика у твом разреду.

д) Просечна боја косе људи у једном селу.

2. Абдула је записивао број километара које је прелазио свакога дана у свом аутомобилу.

Записао је следеће податке: 12, 15, 8, 9, 14, 137, 8.

а) Нађи мод, медијану и просек за ова растојања.

б) Са којом од вредности под **а)** ћеш најбоље представити ова растојања? Објасни свој одговор.

3. На пакетићу са спајалицама за папир пише: „Просечно садржи 30 спајалица."

Ангел је избројао спајалице у 170 пакетића.

Спајалице	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Фреквенција	5	3	8	12	48	32	17	20	15	5	1	4

а) У колико пакетића се налази 30 или више спајалица?

б) У колико пакетића има мање од 30 спајалица?

в) Израчунај мод, медијану и просек броја спајалица у пакетићима.

г) Искористи своја решења под **в)** да објасниш тврдњу „просечно садржи 30 спајалица".

4. Урош је записивао времена потребна за преузимање датотека са интернета у секунди до најближе секунде.

Мод за времена је 4 секунде. Просек за времена је 9 секунди. Медијана за времена је 6 секунди.

За сваку од следећих тврдњи одреди да ли је тачна, нетачна или се о тачности поуздано не може ништа рећи.

а) Највећи број који приказује време за преузимање износи 4 секунди.

б) Више од половине времена за преузимање је мање од 7 секунди.

в) Постоји мали број који приказује врло мала времена за преузимање.

г) Потребно је 5 секунди за преузимање једне датотеке. То је дуже од времена које је потребно да би се преузео највећи број датотека појединачно.

д) Потребно је 6 секунди за преузимање једне датотеке. За тачно половину датотека је потребно издвојити више времена за преузимање.

5. Теа врши истраживање којим би упоредила трошкове одгоја различитих кућних љубимаца.

Сазнала је следеће податке од 10 власника папагаја.

Месечни трошак у денарима.

110, 100, 90, 240, 60, 160, 80, 40, 250, 320

Сазнала је следеће податке од 8 власника хрчака.

Месечни трошак у денарима.

80, 220, 180, 30, 50, 210, 40, 190

Она је рекла: „У просеку, скупље је да чуваш папагаја него хрчка.

Да ли је она у праву? Покажи како је то одлучила.

Изабери шта ћеш користити: мод, медијану или просек.

6. У табелама су приказани подаци о платама запослених у једној фабрици.

Радници	
Плата, p, денари (у хиљадама)	Фреквенција
$10 < p \leq 20$	8
$20 < p \leq 30$	28
$30 < p \leq 40$	14
$40 < p \leq 50$	3
$50 < p \leq 60$	0

Менаџери	
Плата, p, денари (у хиљадама)	Фреквенција
$10 < p \leq 20$	0
$20 < p \leq 30$	0
$30 < p \leq 40$	5
$40 < p \leq 50$	12
$50 < p \leq 60$	8

а) Направи процену просека плата радника.

б) Направи процену просека плата менаџера.

в) Комбинуј податке из табела. Израчунај просек плата запослених у фабрици.

г) Радници хоће да се њихове плате увећају. Коју вредност би требало да искористе како би покушали да добију максимално увећање зараде.

д) Према чланку у једним новинама, људи су у фабрикама већ добро плаћени. Коју су вредност вероватно користили у новинама да би написали овај чланак?

5.5 Упоређивање подела

Полигон фреквенције

Полигон фреквенције користимо да би представили и упоредили поделе фреквенција груписаних и континуираних података.

Тачке полигона су нацртане у пресеку координата на средини сваке класе и координата сваке фреквенције за одговарајућу класу.

Тачке су међусобно повезане правим линијама.

За осе на координатном систему на полигону фреквенција важе иста правила као и код дијаграма фреквенција.

„Врх полигона фреквенција“ приказује где су подаци сконцентрисани.

Две поделе могу бити приказане у истом координатном систему.

У том случају полигоне морамо цртати различитим бојама и дати кључ.

Када тумачимо полигоне можемо говорити о положајима врхова и распрострањености подела.

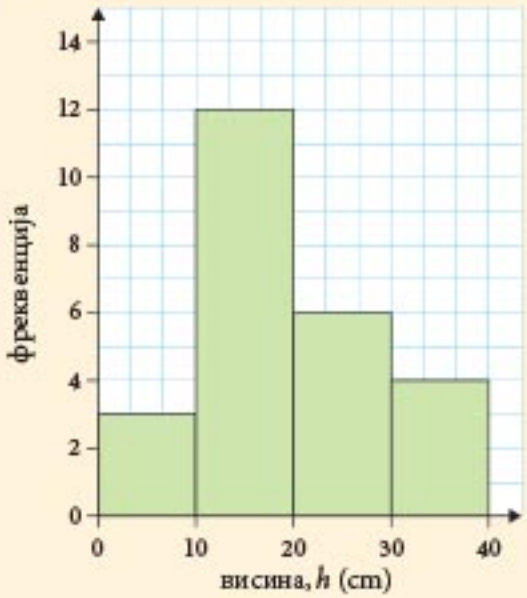
Пример 1

За висине h у cm, приказане у табели, нацртај:

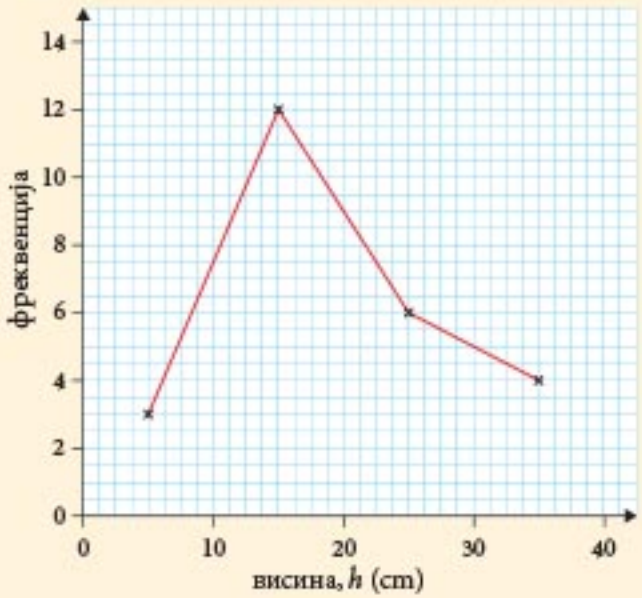
а) дијаграм фреквенције **б)** полигон фреквенције

Висина, h (cm)	Фреквенција
$0 < h \leq 10$	3
$10 < h \leq 20$	12
$20 < h \leq 30$	6
$30 < h \leq 40$	4

а)



б)



Ступчсти дијаграм

Ступчасте дијаграме користимо да бисмо истовремено приказали две или више група података. Њих називамо **вишеструки ступчасти дијаграми.**

Ступчасте дијаграме који приказују само две групе података називамо **двоструки ступчасти дијаграми.**

Вишеструки ступчасти дијаграми омогућују лако упоређивање између две или више подела.

Када цртамо вишеструке ступчасте дијаграме, морамо укључити и кључ.

Правила вишеструких ступчастих дијаграма су иста као и код обичних ступчастих дијаграма.

Пример 2

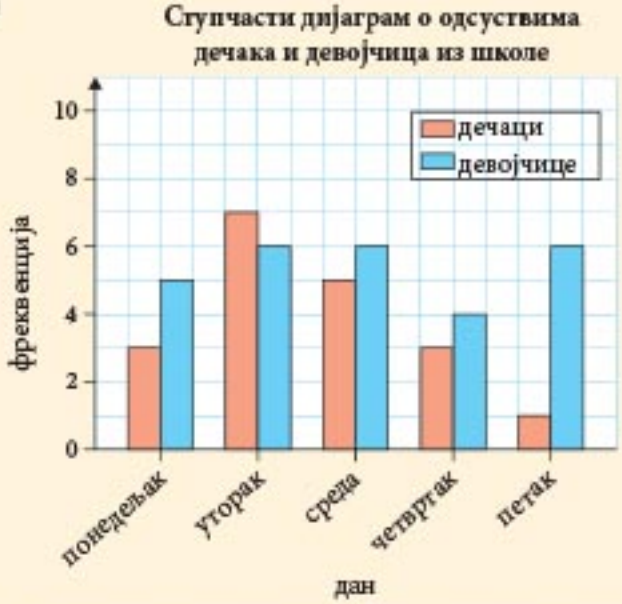
Одсуства дечака и девојчица из школе у току читаве седмице су дата у следећој табели.

	Понедељак	Уторак	Среда	Четвртак	Петак
Дечаци	3	7	5	3	1
Девојчице	5	6	6	4	6

а) Прикажи податке вишеструким ступчастим дијаграмом.

б) Упореди одсуства дечака и девојчица.

а)

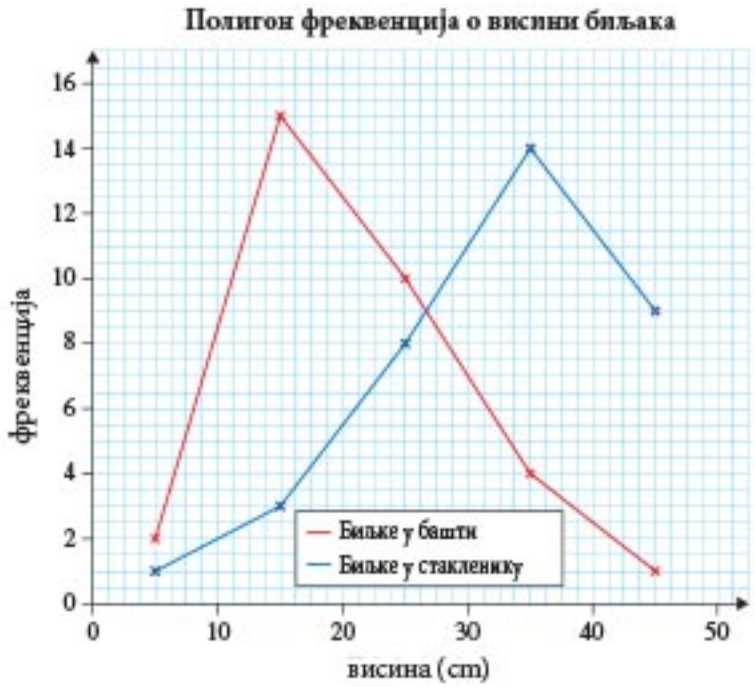


б) Девојчице одсуствују више. Одсуства дечака достижу врх уторком и постепено се смањују у току седмице.

Задаци

1. Елена узгаја биљке у стакленику и у башти.

Полигон фреквенција показује висине њених биљака.



а) Колико биљака из баште има висину између 10 cm и 20 cm?

б) Колико биљака у стакленику има висину између 10 cm и 20 cm?

в) Колико биљака из баште има висину од 20 cm и већу?

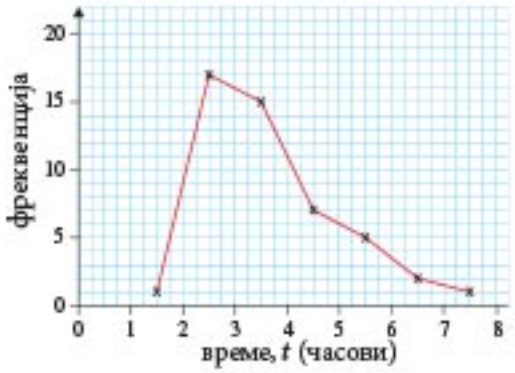
г) Колико биљака у стакленику има висину од 20 cm и већу?

д) Које биљке у целини расту више? Шта можеш да закључиш из полигона фреквенција?

2. При истраживању две групе ученика, записана су времена која они проводе испред рачунара у току једне седмице.

Полигон фреквенција приказује резултате за групу А.

Полигон фреквенција о времену проведеном испред рачунара за групу А



У табели су приказана времена ученика из групе Б, која они проводе испред рачунара у току исте седмице као и ученици из групе А.

Време, t (часови)	$1 < t \leq 2$	$2 < t \leq 3$	$3 < t \leq 4$	$4 < t \leq 5$	$5 < t \leq 6$	$6 < t \leq 7$	$7 < t \leq 8$
Фреквенција	0	3	5	8	14	13	3

а) Нацртај полигон фреквенција за групу Б, користећи исти размер као и за групу А.

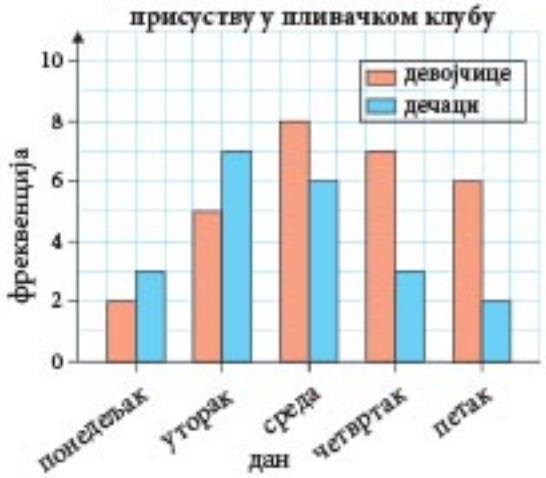
б) Колико ученика из групе Б је провело мање од 4 часа испред рачунара?

в) Колико ученика из групе А је провело мање од 4 часа испред рачунара?

г) Помоћу полигона фреквенција одреди која је група у целини провела више времена испред рачунара. Објасни свој одговор.

3. Двоструки ступчасти дијаграм приказује присуство дечака и девојчица у пливачком клубу у току једне седмице.

Двоструки стубичасти дијаграм о присуству у пливачком клубу



а) Колико је девојчица присуствовало у уторак?

б) Колико дечака је присуствовало у петак?

в) Ког дана је присуствовало највише девојчица?

г) Ког дана је присуствовало највише дечака?

д) Ког дана је забележено највеће укупно присуство?

ђ) Колико је више девојчица присуствовало у односу на дечаке у току читаве недеље?

4. У једном истраживању учесницима је постављено питање колико пута и зашто путују.

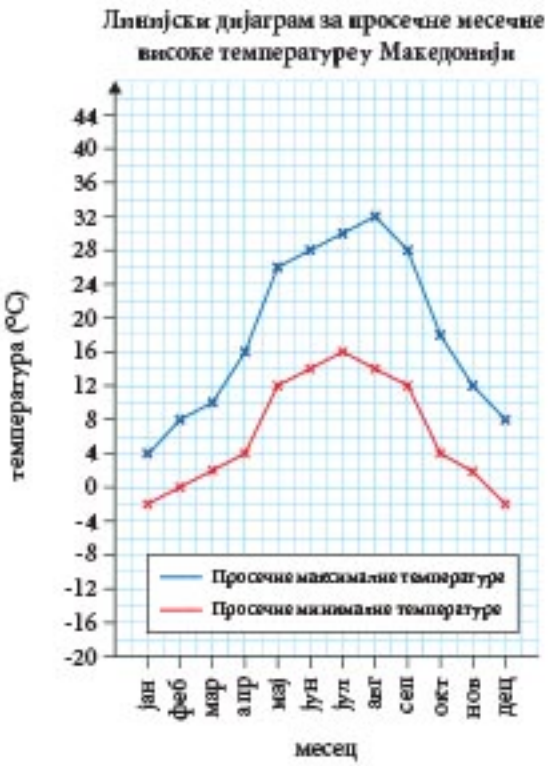
У табели су приказана путовања људи годишње за три узастопне године.

	2007	2008	2009
Куповина	186	198	193
Пут до посла	162	156	147
Службени пут	33	30	30

а) Нацртај вишеструки ступчасти дијаграм да прикажеш податке.

б) Направи упоређивање података вишеструког ступчастог дијаграма.

5. На линијском дијаграму су приказане просечне месечне високе температуре и просечне месечне ниске температуре у Македонији.



а) Колика је просечна ниска температура у јануару?

б) Колика је просечна висока температура у јануару?

в) Колика је разлика између просечно високе и просечно ниске температуре у јануару?

г) У ком месецу је примећена највећа разлика између просечно високе и просечно ниске температуре?

д) Једног дана Јован је проверио спољашњу температуру. Он каже да је она 28°C. У којим месецима је најверојатније да се измери ова температура?

6. Марија каже: „Дечаци су виши од девојчица.“

У табели су приказани подаци које је прикупила за неколико тринаестогодишњака.

Висина, h (cm)	Фреквенција дечака	Фреквенција девојчица
$140 < h \leq 150$	1	4
$150 < h \leq 160$	5	8
$160 < h \leq 170$	10	12
$170 < h \leq 180$	13	6
$180 < h \leq 190$	2	0

а) Нацртај полигон фреквенција да прикажеш висине девојчица и дечака.

б) Да ли мислиш да је Марија у праву? Објасни свој одговор.

7. Тестирани су производи два произвођача.

Резултати су приказани у табели фреквенција.

Произвођач X	
Време, t (часови)	Фреквенција
$0 < t \leq 5$	1
$5 < t \leq 10$	6
$10 < t \leq 15$	2
$15 < t \leq 20$	1

Произвођач Y	
Време, t (часови)	Фреквенција
$0 < t \leq 5$	1
$5 < t \leq 10$	3
$10 < t \leq 15$	5
$15 < t \leq 20$	1

а) Нацртај полигон фреквенција да прикажеш оба времена.

б) Тодор хоће да купи једну батерију. Ког произвођача ћеш му препоручити? Објасни свој одговор.

Користи полигон да одлучиш.

Задаци за понављање

1. Горан се налази на локацији А. Бојан се налази на локацији Б.

Горан каже: „На локацији А је већа гужва него на локацији Б.“

Они су бројали људе који су пролазили поред њих у периоду од пола сата сваког дана током 3 недеље.

Њихови резултати су следећи:

Локација А:

21, 34, 37, 45, 27, 36, 47, 51, 61, 19, 28, 46, 50, 23, 42, 38, 47, 20, 39, 48, 53

Локација Б:

55, 37, 24, 16, 24, 33, 39, 48, 13, 28, 37, 51, 62, 10, 25, 42, 44, 21, 35, 38, 56

а) Нацртај следбени стабло-лист дијаграм да прикажеш податке.

б) Нађи медијану и ранг за локацију А.

в) Нађи медијану и ранг за локацију Б.

г) Да ли је Горан у праву? Објасни свој одговор.

2. Ангел истражује куповину бицикла.

а) Предложи питање које би могао да постави.

б) Који су му подаци потребни?

в) Да ли су ти подаци примарни или секундарни?

3. Која је разлика између примарних и секундарних извора података?

4. Једна компанија има 451 запосленог радника.

Менаџерка хоће да открије шта запослени мисле о кантини у компанији.

а) Наведи један разлог зашто треба да се користи узорак.

б) Колико људи треба да обухвати узорак?

в) Који метод за прикупљање података треба да користи менаџерка?

г) Да ли је прикупила примарне или секундарне податке?

д) Она користи упитник за прикупљање својих података.

Запиши два питања која би могла да искористи менаџерка.

5. Ариета истражује колико времена ученици у њеном разреду проводе читајући књиге.

а) Наведи две неправилности овог питања.

б) Запиши боље формулисано питање које би могла да искористи.

6. Један фармер је записао број јаја који носе његове кокошке у току 28 дана:

25	31	42	12	21	31	45	31	20	17
6	15	27	38	41	52	19	26	24	18
15	16	18	27	34	36	41	50		

Запиши ове податке у табели фреквенција користећи адекватне класе.

7. Од групе наставника добијени су подаци о броју радних часова сваке недеље.

Ти подаци су приказани у табели.

а) Направи процену о просеку радних сати користећи средње вредности класа.

б) Одреди класу која садржи медијану радних часова.

Радни часови, h	Фреквенција
$35 < h \leq 40$	1
$40 < h \leq 45$	4
$45 < h \leq 50$	7
$50 < h \leq 55$	15
$55 < h \leq 60$	9
$60 < h \leq 65$	8
$65 < h \leq 70$	3

8. Чланови у једном атлетском клубу су завршили трку.

У табели су приказана њихова времена.

Време, t (минути)	Фреквенција
$30 < t \leq 40$	15
$40 < t \leq 50$	17
$50 < t \leq 60$	11
$60 < t \leq 70$	7

а) Направи процену просека времена.

б) У трци је учествовало неколико тркача који нису чланови атлетског клуба.

Просек њиховог времена је 49 минута.

Упореди времена чланова атлетског клуба са временима тркача који нису чланови клуба.

9. Јордан и Маја су упоређивали услуге две компаније за превоз А и Б.

Времена кашњења су следећа:

Компанија А: 5, 10, 15, 30, 5, 20, 5, 10, 5, 10

Компанија Б: 0, 0 , 30, 40, 0, 10, 15, 25, 10, 0

а) Израчунај просек, медијану и мод за број минута кашњења сваке компаније за превоз.

б) Јордан каже да је боља компанија А. Наведи један разлог који показује да би Јордан могао бити у праву.

в) Маја је рекла да је боља компанија Б. Наведи један разлог зашто би Маја могла бити у праву.

10. Једна компанија има 50 запослених.

Табела показује позиције, број запослених и месечних плата у денарима.

Позиција	Председник	Директор	Менаџер	Руководилац	Квалификовани радник	Општи радник	Хигијеничар
Број запослених	1	2	4	8	13	18	4
Месечна плата	100000	75000	40000	30000	22000	15000	12000

а) Одреди мод, просек и медијану запослених у компанији.

б) Која статистика најбоље представља податке? Објасни зашто.

11. Симона се вози аутомобилом до посла сваки дан.

Она може да бира између путање А и путање Б.

У табели су приказана њена времена по две руте у току два месеца.

Рута А	
Време, t (минути)	Фреквенција
$5 < t \leq 10$	5
$10 < t \leq 15$	6
$15 < t \leq 20$	12
$20 < t \leq 25$	4
$25 < t \leq 30$	3

Рута Б	
Време, t (минути)	Фреквенција
$5 < t \leq 10$	0
$10 < t \leq 15$	6
$15 < t \leq 20$	21
$20 < t \leq 25$	3
$25 < t \leq 30$	0

а) Процени временски просек ако се користи путања А.

б) Процени временски просек ако се користи путања Б.

в) Која је рута опште узевши бржа?

г) Једног дана се Симона успавала.

Она мора да стигне на посао за 25 минута, иначе ће закаснити на посао.

Коју руту треба да одабере? Објасни свој одговор.

12. Бојана и Мартин помажу у кући да би зарадили џепарац.

Бојана каже: „Ја радим дуже од Мартина.“

Они су записивали времена проведена на послу сваке недеље.

Време, t (минуте)	Фреквенција Бојане	Фреквенција Мартина
$30 < t \leq 60$	2	3
$60 < t \leq 90$	3	10
$90 < t \leq 120$	5	9
$120 < t \leq 150$	14	4
$150 < t \leq 180$	4	2

а) Нацртај полигон фреквенција да прикажеш податке.

б) Да ли је Бојана у праву? Објасни свој одговор.

13. Температура једног стакленика се мери на сваких 30 минута.

У табели су приказане температуре у стакленику у току једног поподнева.

Време	12:00	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00	15:30	16:00	16:30	17:00	17:30
Температура (°C)	23	25	27	29	30	30	31	32	31	30	29	26

а) Покажи податке линијским дијаграмом.

б) Када је први пут температура достигла 30°C?

в) Колико дуго је температура била 30°C?

г) Процени дужину времена у коме је температура била виша од 26°C.

6 Број и решавање проблема

Наставни циљеви

- Процењивање квадратних и кубних корена.
- Примена редоследа операција, укључујући заграде и степеновања.
- Утврђивање коришћења правила за аритметичке и инверзне операције за упрошћавање и израчунавање.
- Проширивање знања о менталним методама за израчунавање, рад са децималним бројевима, разломцима, процентима и множиоцима, као и коришћење бележака.
- Решавање проблема повећавања или смањивања процената, укључујући једноставне проблеме личних или домаћих финансија, на пример, камате, попуста, добитка, губитка и пореза.
- Мисаоно решавање текстуалних проблема.
- Одговарајућа примена разломака или процената ради упоређивања различитих количина.
- Прецизно идентификовање, организовање, представљање и тумачење података у писменом облику, табеларно, графички и дијаграмом.
- Упоређивање две размере; тумачење и коришћење размере у различитим контекстима.
- Рад са бројевима, алгебарским изразима и једначинама уз честу употребу алгоритама.
- Препознавање двеју директно пропорционалних величина: решавање проблема са пропорционалношћу, на пример, прелаз из једне валуте у другу.

6.1 Квадратни и кубни корени

Квадратни корени

Целе бројеве 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,... називамо **потпуни квадрати**. Потпуни квадрат је број добијен множењем произвољних целих бројева самих са собом.

Квадратни корен је број чији је квадрат испод корена.

Ако израчунамо квадратни корен потпуног квадрата, онда ћемо добити број од кога је добијен потпуни квадрат.

На пример, квадратни корен од 36 је 6 и – 6.

Тако је зато што је $6^2 = 36$.

Пример 1

Запиши квадратне корене:

а) 81 **б)** 169 **в)** 400 **г)** 225

а) $9^2 = 81$, па је квадратни корен броја 81 = 9

б) $13^2 = 169$, па је квадратни корен броја 169 = 13

в) $20^2 = 400$, па је квадратни корен броја 400 = 20

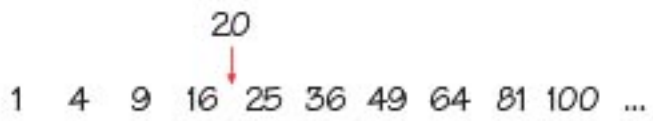
г) $15^2 = 225$, па је квадратни корен броја 225 = 15

Требало би да научиш напамет потпуне квадрате до 400.

Квадратни корен било ког другог броја, на пример $\sqrt{20}$, није цео број.

Вршимо процену вредности корена тако што одређујемо два потпуна квадрата између којих се налази та вредност.

Посматрамо низ потпуних квадрата.



Број 20 је већи од 16 и мањи од 25.

$\sqrt{20}$ је већи од $\sqrt{16}$ и мањи од $\sqrt{25}$.

$\sqrt{20}$ је већи од 4 и мањи од 5.

Број 20 је приближно у средини између 16 и 25,
па ће квадратни корен 20 бити
приближно 4,5.

Калкулатором добијамо $\sqrt{20} = 4{,}47$ заокругљено
на два децимална места, па је 4,5 добро направљена процена.

Пример 2

Направи процену квадратних корена следећих бројева:

а) 40 **б)** 55 **в)** 160

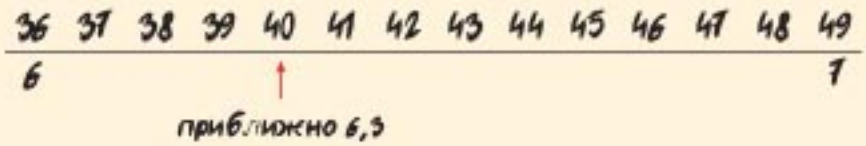
Решења провери калкулатором.

а) 40 је између 36 и 49.

$\sqrt{40}$ је између 6 и 7.

40 је ближе броју 36 него 49.

Размотримо на бројевној оси. Квадратни корен од 40 је приближно 6,3.



Калкулатором добијамо да је $\sqrt{40} = 6{,}325$ (заокругљено на три децимална места).

б) 55 је између 49 и 64.

$\sqrt{55}$ је између 7 и 8.

55 је ближе до 49 него 64.

Квадратни корен од 55 је приближно 7,4.

Калкулатором добијамо да је $\sqrt{55} = 7{,}416$ (заокругљено на 3 децимална места).

в) 160 је између 144 и 169.

$\sqrt{160}$ је између 12 и 13.

160 је ближе 169 него 144.

Квадратни корен од 160 је приближно 12,7.

Калкулатором добијамо да је $\sqrt{160} = 12{,}649$ (заокругљено на три децимална места).

Кубни корени

За процену кубних корена користи се исти метод као код квадратних корена.

Једина разлика јесте то што негативни бројеви имају негативни кубни корен.

$\sqrt[3]{125} = -5$ зато што је $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Има непаран број негативних знакова, па ће резултат бити негативан.

Потпуни кубови од 1^3 до 10^3 су:

$\mathbf{1} = 1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1$ $\quad -\mathbf{1} = (-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

$\mathbf{8} = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad -\mathbf{8} = (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

$\mathbf{27} = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad -\mathbf{27} = (-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

$\mathbf{64} = 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ $\quad -\mathbf{64} = (-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

$\mathbf{125} = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$ $\quad -\mathbf{125} = (-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

$\mathbf{216} = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6$ $\quad -\mathbf{216} = (-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$

$\mathbf{343} = 7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$ $\quad -\mathbf{343} = (-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$

$\mathbf{512} = 8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8$ $\quad -\mathbf{512} = (-8)^3 = (-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$

$\mathbf{729} = 9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$ $\quad -\mathbf{729} = (-9)^3 = (-9) \cdot (-9) \cdot (-9)$

$\mathbf{1000} = 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$ $\quad -\mathbf{1000} = (-10)^3 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10)$

Требало би да научиш напамет првих неколико кубова: 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3 и 10^3.

Пример 3

Процени следеће бројеве:

а) $\sqrt[3]{20}$ **б)** $\sqrt[3]{-140}$ **в)** $\sqrt[3]{750}$

а) 20 је између 8 и 27.

$\sqrt[3]{20}$ је између 2 и 3.

20 је ближе до 27 него до 8.

$\sqrt[3]{20}$ је приближно 2,7.

б) -140 је између -125 и -216.

$\sqrt[3]{-140}$ је између -5 и -6.

-140 је ближе до -125 него до -216.

$\sqrt[3]{-140}$ је приближно $-5{,}2$

в) 750 између 729 и 1000.

$\sqrt[3]{750}$ између 9 и 10.

750 је ближе до 729 него до 1000.

$\sqrt[3]{750}$ је приближно 9,1.

Задаци

1. Препиши и направи процену за $\sqrt{70}$, а затим допуни да би следеће тврдње биле тачне.

70 је између 64 и .....

$\sqrt{70}$ је између ..... и .....

10 је ближе до ..... него до .....

$\sqrt{70}$ је приближно једнак .....

2. Израчунај следеће квадратне корене. Решења провери калкулатором.

а) $\sqrt{5}$ **б)** $\sqrt{15}$ **в)** $\sqrt{45}$ **г)** $\sqrt{90}$ **д)** $\sqrt{300}$

ђ) $\sqrt{200}$ **е)** $\sqrt{380}$ **ж)** $\sqrt{265}$ **з)** $\sqrt{180}$ **и)** $\sqrt{125}$

3. **а)** Израчунај вредности од 21^2 и 22^2.

б) Искористи решење под **а)** да процениш колико је $\sqrt{450}$.

в) Провери своја решења калкулатором.

4. Запиши све кубове између 1 и 1000.

5. Искористи решење задатка 4 да процениш следеће кубне корене.

Провери решења калкулатором.

а) $\sqrt[3]{4}$ **б)** $\sqrt[3]{30}$ **в)** $\sqrt[3]{90}$ **г)** $\sqrt[3]{200}$ **д)** $\sqrt[3]{-50}$

ђ) $\sqrt[3]{-500}$ **е)** $\sqrt[3]{950}$ **ж)** $\sqrt[3]{-120}$ **з)** $\sqrt[3]{-10}$ **и)** $\sqrt[3]{350}$

6. Дата је бројевна шема квадратних бројева.

$1^2 - 0^2 = 1 + 0 = 1$

$2^2 - 1^2 = 2 + 1 = 3$

$3^2 - 2^2 = 3 + 2 = 5$

$4^2 - 3^2 = \_\_ + \_\_ = 7$

$5^2 - 4^2 = \_\_ + \_\_ = \_\_$

$6^2 - 5^2 = \_\_ + \_\_ = \_\_$

а) Препиши шему и попуни празна места.

б) Допуни следећа два реда из шеме.

в) Израчунај: **i** $10^2 - 9^2$ **ii** $16^2 - 15^2$

Користи исто правило из шеме.

7. Марко и Матеј разговарају о домаћем задатку.

Марко каже да је $\sqrt{-100} = -10$ зато што је $\sqrt{100} = 10$

Матеј каже да $\sqrt{-100}$ не може да се израчуна зато што негативни бројеви немају квадратни корен.

Ко је у праву?

Покушај да израчунаш $(-10)^2$. Шта ће се десити ако помножиш два негативна броја?

6.2 Редослед операција

Редослед по којем ће се извршавати операције у једном изразу је веома битан.

У VIII разреду смо учили о редоследу извршавања операција.

Заграде

Степени

Дељење
Множење

Сабирање
Одузимање

Операције су записане по редоследу извршавања. Прво се извршавају операције у заградама. Затим се врши степеновање.

Дељење и множење су операције са истом важношћу и могу се извршавати истовремено.

Сабирање и одузимање имају исто тако исту важност и њих извршавамо на крају.

Пример 1

Израчунај: $24 + 4^2 \cdot (9 - 7) - 27 : 3$

$24 + 4^2 \cdot (9-7) - 27 : 3$ Прво израчунавамо оно што је у загради.

$= 24 + 4^2 \cdot 2 - 27 : 3$ Затим израчунавамо степене.

$= 24 + 16 \cdot 2 - 27 : 3$ Потом следи дељење и множење.

$= 24 + 32 - 9$ На крају, сабирање и одузимање

$= 47$

Пример 2

Употреби заграде да би била тачна следећа једнакост:

$21 - 12 : 6 - 2^2 = 23$

Стављамо заграде на неколико различитих места.

а) Без заграда

$21 - 12 : 6 - 2^2$

$= 21 - 12 : 6 - 4$

$= 21 - 2 - 4 = 15$ Ово није тачно.

б) $(21 - 12) : 6 - 2^2$

$= 9 : 6 - 2^2$

$= 9 : 6 - 4$

$= 1\frac{1}{2} - 4 = -2\frac{1}{2}$ Ово није тачно.

в) $21 - 12 : (6 - 2^2)$

$= 21 - 12 : 2$

$= 21 - 6 = 15$ Ово није тачно.

г) $21 - (12 : 6 - 2^2)$

$= 21 - (12 : 6 - 4)$

$= 21 - (2 - 4)$

$= 21 - (-2) = 23$ Ово је тачно.

Само су у последњем случају заграде правилно употребљене.

Задаци

Израчунај:

1. $17 - 5 \cdot 3$ **2.** $32 : 8 + 3^2$ **3.** $69 - 52 \cdot 2$

4. $7 + 3 \cdot 4$ **5.** $3 \cdot 5 + 6 \cdot 2$ **6.** $9 \cdot 4 - 20 : 5$

7. $6 \cdot (3 + 2)$ **8.** $12 : (8 - 4)$ **9.** $9 \cdot (2 + 3) \cdot 10$

10. $3^2 - 2^2 \cdot 2$ **11.** $(3^2 - 2^2) \cdot 2$ **12.** $60 : 2^2 - 8$

13. $36 - 5^2 + 2 \cdot 3$ **14.** $3 \cdot (4^2 - 3^2)$ **15.** $(5 + 2 \cdot 4)^2$

16. $2^3 + 3^3 \cdot 2$ **17.** $17 + 3^2 \cdot (6 - 2)$ **18.** $12^2 - (2 + 7 \cdot 4)$

19. $36 - 3^3 : (12 - 9) - 2^3$ **20.** $(1 + 2)^3 + 4 \cdot 5 - 6$

Употреби заграде, тамо где је неопходно, да би једнакости биле тачне.

21. $12 + 3 \cdot 2 = 30$ **22.** $5 \cdot 8 - 3 = 25$ **23.** $32 : 8 - 4 = 8$

24. $36 : 3 + 6 \cdot 2 = 8$ **25.** $5^2 - 7 \cdot 2 = 36$ **26.** $9 - 7 \cdot 3^2 = 18$

27. $2^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 = 90$ **28.** $6 + 2 \cdot 5^2 = 56$

29. Марко је записао једну једнакост, али је заборавио заграде.

$5 + 12 \cdot 3 - 1 = 2 + 3 \cdot 6 - 1$

Да би једнакост била тачна, употреби заграде у изразима са обе њене стране.

Потребно је да ставиш заграде на више различитих места, пре него што нађеш тачан запис једнакости.

6.3 Повећавање и смањивање процената

Компаније, као и нека физичка лица, плаћају порез.

Људи плаћају порез на новац који зарађују и на новац који троше.

Порез се изражава у процентима, па се иста пропорција плаћа за разне опште суме.



Да бисмо увећали једну величину за одређени проценат, налазимо проценат те величине и добијени број додајемо почетној величини.

Да бисмо умањили једну величину за одређени проценат, налазимо проценат те величине и добијени број одузимамо од почетне величине.

Пример 1

Број становника у једном селу је 260.

Се очекува следната година тој да се зголеми за 5%.

Израчунај колики је очекивани број становника у селу.

$\frac{5}{100} \cdot 260 = 13$ Ово је увећање

$260 + 13 = 273$ Додајемо увећање.

Очекивани број становника је 273.

Пример 2

Један бицикл се продаје за 12500 денара.

Његова цена је смањена за 15%.

Одреди нову цену бицикла.

$\frac{15}{100} \cdot 12500 = 1875$ Ово је умањење

$12500 - 1875 = 10625$ Одузимамо умањење.

Бицикл после умањења цене кошта 10625 денара.

Примена процената

Када једна продавница купује производ и продаје га скупље него што је платила за њега, разлику у цени називамо **добитак** (**профит**). Када једна продавница продаје производ за нижу цену од набавне, онда се разлика назива **губитак**.

Када имамо новац у банци, за њега нам банка плаћа камату. Она се обично плаћа на крају године. На пример, каматна стопа од 5% сваке године често се описује као 5% **годишње**. Ако се камата не додаје на рачун, онда је реч о **простој камати**.

Цене су најчешће приказане са урачунатим порезом, понекад су дате и без пореза.

Пореске стопе се разликују, у зависности од тога шта се продаје и у којој земљи се продаја врши.

Пример 3

Марија продаје колаче у својој продавници.

Израда једног колача кошта 30 денара.

Она хоће да оствари добитак од 80%.

Колика треба да буде цена једног колачића?

$\frac{80}{100} \cdot 30$ денара $= 24$ денара

30 денара $+ 24$ денара $= 54$ денара

Ово је добитак који хоће да оствари, 80% од цене коштања.

Значи, сваки колачић мора да се продаје за 54 денара.

Пример 4

Никола има уштеђевину од 5000 денара у банци.

Добија просту камату од 6% годишње за своју уштеду.

Колику камату треба да добије Никола ако новац остане у банци две године?

$\frac{6}{100} \cdot 5000 = 300$ денара — Ово је камата коју добија сваке године.

300 денара $\cdot$ 2 = 600 денара

Укупна камата је 600 денара.

Одређивање процента

Понекад је потребно да одредимо број који је разломак или проценат другог броја.

Да бисмо то израчунали, прво записујемо тражени број као разломак, а затим тај разломак претварамо у проценат.

Када израчунавамо увећање или умањење неке вредности, ми у ствари упоређујемо промену са оригиналном вредношћу.

Пример 5

Тања је купила бицикл за 7500 денара.

Касније га је продала за 6500 денара.

Израчунај колико процената је на губитку.

Запиши решење заокругљено на једно децимално место.

7500 − 6500 = 1000 денара — Ово је губитак када је продала бицикл.

$\frac{1000}{7500} \cdot 100 = 13{,}(3)\% = 13{,}3\%$ (на 1 д.м.) — То је губитак као проценат оригиналне цене.

Тањин губитак је 13,3% (на 1 д.м.).

Пример 6

Софија полаже неколико тестова из математике.

Добила је 25 поена од могућих 30 поена на тесту о разломцима.

Добила је 34 поена од могућих 40 поена на тесту о вероватноћи.

Добила је 48 поена од могућих 60 поена на тесту о низовима.

На ком тесту је Софија постигла најбољи резултат?

На ком тесту је Софија постигла најлошији резултат?

Тестови имају различите вредности, па је потребно да пронађемо проценте и да их затим упоредимо.

Тест о разломцима: $\frac{25}{30} \cdot 100 = 83{,}3\%$ (на 1 д.м.)

Тест о вероватноћи: $\frac{34}{40} \cdot 100 = 85\%$

Тест о низовима: $\frac{48}{60} \cdot 100 = 80\%$

Софија је постигла најбољи резултат на тесту о вероватноћи. Најслабији резултат је постигла на тесту о низовима.

Задаци

1. Једна туристичка агенција је повећала своје цене за 15%.

Израчунај нове цене карата које су претходно коштале:

а) 1200 денара **б)** 2400 денара **в)** 3600 денара

2. У једној продавници траје снижење свих цена за 25%.

Нађи нову, умањену цену за:

а) телевизор, чија је првобитна цена била 28000;

б) меморијску картицу, чија је првобитна цена била 1400 денара;

в) фотоапарат, чија је првобитна цена била 6000 денара.

3. Банка плаћа 3% годишње просте камате за све депозите у еврима.

Израчунај камату која ће бити исплаћена на крају године:

а) Марији, која је имала банкарски депозит од 250 евра.

б) Љиљани, која је имала банкарски депозит од 320 евра.

в) Кости, који је имао банкарски депозит од 280 евра.

4. Једна врећа цемента се продаје за 386 денара плус порез.

Порез је 18%.

Колико треба да се плати за једну врећу цемента?

5. На слици је приказан мени из ресторана.

Ресторан наплаћује 10% од сваке појединачне поруџбине као надокнаду за услуге.

Израчунај колико кошта свака врсте пице, укључујући надокнаду за услуге.



6. Александар има 3600 денара.

Он је потрошио 3000 денара за ципеле и 2400 денара за кошуљу.

Колики проценат новца је потрошио Александар?

7. Али продаје лимунаду у флашама запремине 1 литар.

Трошкови за производњу 1 литра лимунаде износе 60 денара.

Он продаје лимунаду по 75 денара за литар.

а) Колики је његов добитак у процентима?

б) Продао је 20 литара лимунаде. Колика је његова укупна зарада?

8. У табели су приказане укупне површине као и водена површина 5 држава.

Држава	Укупна површина (km^2)	Водена површина (km^2)
Аустралија	7741220	58920
Канада	9984670	891163
Белгија	30528	250
Уругвај	176215	1200
Гана	238533	11000

Одреди проценат водене површине за сваку од пет држава.

Решења заокругли на два децимална места.

9. Елена је купила кухињу која је коштала 24000 денара.

Она је платила 35% од укупне цене, а остатак је требало да плати на 24 једнаке месечне рате.

Колико износи њена месечна рата?

Прво одузми суму коју је платила.

10. У табели су приказани подаци о броју ученика и ученица за програм дошколовавања Вања у једној држави између 1970. и 2008. године.

Ученици (хиљаде)			
1970/71	1980/81	1990/91	2007/08
116	154	219	520

Ученице (хиљаде)			
1970/71	1980/81	1990/91	2007/08
95	196	261	534

а) Израчунај промене у процентима од 1970/71. до 1980/81. године за:

I ученике **II** ученице.

б) Израчунај промене у процентима од 1990/91. до 2007/08. године за:

I ученике **II** ученице.

в) Израчунај проценат ученика у свакој години, приказаној у табели.

г) Шта може да се каже о променама процената под **в)**.

Упореди промену са оригиналном вредношћу.

Проценти изнад 100 и испод 100

Понекад је потребно одредити колика је била величина пре но што је дошло до промене процента.

Потребно је да пажљиво прочитамо задатак да бисмо открили да ли је вредност величине у задатку дата пре или после промене процента.

Да бисмо израчунали вредност пре промене:

- израчунавамо укупни проценат,
- делимо да бисмо одредили 1%,
- затим множимо са 100 да бисмо нашли вредност пре израчунавања процента.

Пример 7

Андреј треба да плати рачун од 528 денара у ресторану.

Рачун укључује 10% надокнаде за услугу.

Колики је био износ који је Андреј требало да плати пре него што је додата надокнада за услуге?

Оригиналан рачун је 100%.

$10\% + 100\% = 110\%$ Ово је оригинална цена плус надокнада за услуге.

528 денара је 110%.

$1\% = \frac{528}{110}$ денара $= 4{,}8$ денара Делимо са 110 да бисмо одредили вредност од 1%.

$100\% = 100 \cdot 4{,}8$ денара $= 480$ денара

Рачун је био 480 денара.

Пример 8

Цена једног бицикла је смањена за 15% на распродаји.

Сада се продаје за 5950 денара.

Колика је била његова првобитна цена?

Првобитна цена је 100%.

$100\% - 15\% = 85\%$

5950 денара је 85%. Ово је оригинална цена смањена за смањење.

$1\% = \frac{5950}{85}$ денара $= 70$ денара Делимо са 85 да бисмо одредили вредност за 1%.

$100\% = 100 \cdot 70$ денара $= 7000$ денара Множимо са 100 да бисмо одредили вредност од 100%.

Првобитна цена је била 7000 денара.

Задачи

1. Шпорет се продаје по цени умањеној за 25%.

Умањена цена износи 3150 денара.

Колика је била његова првобитна цена?

2. Посуда за кување се продаје на распродаји.

На листићу залепљеном на посуди пише „20% попуста".

Уштеда је 40 денара.

Колика је била њена оригинална цена?

3. Године 2011, музеј је посетило 14400 људи.

Посета је увећана за 20% у односу на 2010. годину.

Колико људи је посетило музеј 2010. године?

4. Панталоне се продају на распродаји за 960 денара.

Њихова првобитна цена је умањена за 40%.

Израчунај првобитну цену.

5. Марко је добио 300 денара за свој банкарски депозит на крају године.

Каматна стопа је 6%.

Пре него што се исплати камата, од ње се одбија 20% за порез.

Пре него што одбијеш порез, прво израчунај камату.

Покажи да је његов банкарски депозит био 6250 денара.

6. Цена једне столице је умањена за 30%.

Умањивање цене износи 450 денара.

Колика је њена умањена цена?

6.4 Упоређивање размера

Размеру користимо за упоређивање једне величине са другом. То упоређивање још називамо и **однос**.

Већ смо учили како се израчунавају размере када треба да одредимо величину делова.

Црвени и бели кликери су помешани у размери 3 : 7, што значи да је 3 дела црвених кликера и 7 делова белих кликера.

Има укупно десет делова.

$\frac{3}{10}$ кликера су црвени, а $\frac{7}{10}$ су бели.

У следећа три примера разматрамо однос више величина.

Пример 1

Подели 2352 у односу 3 : 4 : 1.

$3 + 4 + 1 = 8$ Сабирамо размере да бисмо одредили укупан број малих делова.

$2352 : 8 = 294$ Делимо да бисмо одредили величину једног дела.

$294 \cdot 3 = 882$ Множимо да бисмо одредили величину сваког дела.

$294 \cdot 4 = 1176$

$294 \cdot 1 = 294$

Сва три дела су: 882 денара, 1176 денара и 294 денара.

Проверавамо да ли је одговор тачан сабирањем сва три дела.

$882 + 1176 + 294 = 2352$ ✓

Пример 2

Однос дечака и девојчица на школској екскурзији је 3 : 2.

На екскурзији је било 46 девојчица.

Колико дечака је било на екскурзији?

Збир размера је 5, па има укупно 5 делова.

2 дела су девојчице.

2 дела = 46 — Започињемо са оним што знамо.

1 дел = 46 : 2 = 23 — Делимо да бисмо сазнали колики је један део.

3 дела = 23 · 3 = 69 — Множимо да бисмо одредили тражени број дечака.

На екскурзији је било 69 дечака.

Пример 3

У једној кутији се налазе црвене и плаве лоптице у односу 4 : 5.

Колики део су црвене лоптице? Запиши као разломак.

4 + 5 = 9 — Сабирамо размере да бисмо добили укупан број делова.

4 дела од укупно 9 делова су црвене лоптице.

$\frac{4}{9}$ од лоптица су црвене.

Задаци

1. Скрати следеће размере до њихове најпростије форме.

а) 15 : 25 **б)** 36 : 54 **в)** 81 : 45 **г)** 56 : 48 **д)** 80 : 32

2. Упрости следеће размере. Решења запиши у најпростијој форми.

а) 400 g : 1,2 kg **б)** 1,5 m : 40 cm

в) 2 дена : 8 часа **г)** 600 ml : 2,4 l

д) 25 mm : 4 cm **ђ)** 450 m : 1 km

Претвори обе стране размера у исте мерне јединице.

3. Запиши следеће размере у најједноставнијем облику.

а) 36 : 45 : 27 **б)** 12 : 24 : 18 **в)** 0,5 : 1,5 : 2 **г)** 150 : 240 : 570

4. Куварица има три врећице брашна.



Врећица А има масу 500 g, врећица Б има масу 750 g и врећица В има масу 1,5 kg.

Израчунај однос масе врећице А према врећици Б према врећици В.

Упрости решење.

5. Подели следеће величине у датом односу.

а) 400 денара у односу 4 : 1 **б)** 120 cm у односу 3 : 2 **в)** 38,7 у односу 5 : 4

г) 350 денара у односу 3 : 2 **д)** 576 km у односу 3 : 5 **ђ)** 660 m у односу 10 : 1

6. Христина, Ива и Бети су поделиле 1050 денара у односу 3 : 2 : 1.

Израчунај колико је добила свака од њих.

7. Углови троугла су у односу 5 : 4 : 3.

Израчунај величину најмањег угла у степенима.

8. Углови четвороугла су у односу 2 : 3 : 3 : 7.

Израчунај величину највећег угла у степенима.

9. Однос одраслих лица и деце у једном аутобусу је 1 : 9.

Представи разломком број деце у односу на укупан број људи у аутобусу.

10. $\frac{5}{8}$ деце у школи су девојчице.

Израчунај однос девојчица према дечацима.

11. Парче траке је пресечено у односу 5 : 3.

Краће парче је дугачко 45 cm.

Колика је дужина дужег парчета?

12. У кутији има црних и белих лоптица у односу 7 : 4.

У кутији има 42 црне лоптице.

Израчунај колико укупно лоптица има у кутији.

13. Године Ане и Мими су у односу 3 : 5.

Мими је 6 година старија од Ане.

а) Израчунај колико година има свака од њих.

б) Који ће бити однос њихових година након годину дана.
Упрости решење.

Обе ће бити једну годину старије него у решењу под **а)**.

14. У једној корпи налазе се црвене, зелене и плаве лоптице.

Исти је број зелених и плавих лоптица.

Вероватноћа да се изабере црвена лоптица из корпе је $\frac{3}{7}$

Израчунај однос црвених лоптица :
зелених лоптица : плавих лоптица.

Израчунај вероватноћу да се изабере једна плава лоптица и вероватноћу да се изабере једна зелена лоптица. Ове две вероватноће морају бити једнаке.

15. На мапи је записана размера 1 : 25000.

а) Улица на мапи је дуга 6,4 cm.
Израчунај праву дужину улице
у километрима.

Прво израчунај растојање центиметрима.

б) Дужина аеродромске писте износи 2,5 km.
Колико је дугачка писта на мапи?

Прво претвори километре у центиметре.

в) Правоугаона плантажа на мапи има димензије 3 cm и 1,6 cm.
Израчунај њену површину у хектарима.

1 хектар (ha) = 10000 m^2

Еквивалентне размере

Често се дешава да треба да упоредимо размере.

Да бисмо показали да су размере еквивалентне, скраћивањем их доводимо до њихове најпростије форме.

Ако су размере једнаке када су сведене на њихову најпростију форму, тада су оне **еквивалентне размере**.

Пример 4

Упореди размере 35 : 84 и 60 : 144 и провери да ли су еквивалентне.

Упростивши сваку од размера добијамо:

35 : 84 = **5 : 12** Делимо оба броја са 7.

60 : 144 = 30 : 72 Делимо оба броја са 2.

= **5 : 12** Делимо оба броја са 6.

Ово упрошћавање можемо да извршимо у једном кораку ако поделимо са 12.

Размере су еквивалентне зато што су једнаке са 5 : 12.

Јединичне размере

Ако размере нису једнаке, њихове најпростије форме се не упоређују увек једноставно.

У таквим случајевима користимо два начина.

Први је са претварањем **у јединичну размеру**.

Јединична размера је у облику 1 : *n* или *n* : 1.

До сада су се при упрошћавању размера користили цели бројеви.

Код јединичних размера често вредност *n* није цео број.

Пример 5

Школа А има 565 ученика и 27 наставника.

Школа Б има 840 ученика и 37 наставника.

Која школа има мањи однос ученика према наставнику.

Однос ученика према наставнику у школи А је 565 : 27.

Ту размеру не можемо да упростимо зато што 565 и 27 немају заједничког делиоца.

Разлагање простих делилаца за оба броја је $565 = 113 \cdot 5$ и $27 = 3.\ 3 \cdot 3$ значи да немају заједничке делиоце.

Однос ученика према наставнику у школи Б је 840 : 37.

Ту размеру не можемо да упростимо зато што 840 и 37 немају заједничког делиоца.

Разлагање простих делилаца за оба броја је $840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, а 37 је прост број. Значи да немају заједничке делиоце.

Размере нису еквивалентне зато што имају различите најпростије форме.

Размере ћемо претворити у јединичне размере.

Школа А: $565 : 27 = \frac{565}{27} : 1$ Делимо обе стране са 27.

$= \mathbf{20{,}9 : 1}$ На једно децимално место.

Школа Б: $840 : 37 = \frac{840}{37} : 1$ Делимо обе стране са 37.

$= \mathbf{22{,}7 : 1}$ На једно децимално место.

У школи А има 20,9 ученика на једног наставника, а у школи Б има 22,7 ученика на једног наставника.

Школа А има мањи однос ученик према наставнику.

Примена процената

Други начин за упоређивање размера јесте да размере претворимо у проценте.

Ово је корисно када треба једну величину да одредимо као проценат друге.

Да бисмо применили овај начин, величине записујемо као разломке и разломке претварамо у проценте.

Пример 6

Иво је промешао 240 ml црвене боје са 560 ml беле боје.

Елена је промешала 0,75 l црвене боје са 1,25 l беле боје.

Која мешавина боја има већи проценат црвене боје?

Ивина смеса има 240 ml црвене боје од укупно 800 ml.

То је $\frac{240}{800}$ као разломак.

$\frac{240}{800} = 240 : 800 = 0{,}3$

$0{,}3 = 0{,}3 \cdot 100 = \mathbf{30\%}$

Разломак претварамо у децимални број, а затим децимални број претварамо у проценат.

Еленина смеса има 0,75 l црвене боје од укупно 2 l.

То је $\frac{0{,}75}{2}$ као разломак.

$\frac{0{,}75}{2} = 0{,}75 : 2 = 0{,}375$

$0{,}375 = 0{,}375 \cdot 100 = \mathbf{37{,}5\%}$

Еленина смеса има виши проценат црвене боје.

Задаци

1. Упрости парове размера и утврди да ли су те размере еквивалентне.

а) 15 : 25 и 12 : 18 **б)** 36 : 16 и 45 : 20 **в)** 25 : 40 и 35 : 55

г) 21 : 56 и 18 : 48 **д)** 20 : 30 и 32 : 48 **ђ)** 48 : 60 и 28 : 35

2. Запиши следеће размере у облику $1 : n$.

а) 4 : 7 **б)** 5 : 8 **в)** 6 : 3

г) 8 : 10 **д)** 10 : 8

3. На школским екскурзијама однос ученика и наставника мора да буде мањи од 9 : 1.

На једној екскурзији има 128 ученика и 15 наставника.

а) Израчунај однос ученика према наставнику за ову екскурзију у форми $n : 1$.

б) Да ли има довољно наставника на екскурзији?

4. Денис је помешао 28 kg земље са 7 kg ђубрива.

Горан је помешао 63 kg земље са 17 kg ђубрива.

а) Израчунај проценат ђубрива у свакој смеси.

б) Ко има већи проценат ђубрива?

5. Два баштована су помешали семе за њихове травњаке.

Драган је помешао 5 kg траве са 2 kg евроазијске траве која се користи као сточна храна.

Васко је помешао 3,6 kg траве са 17 kg евроазијске траве.

а) Израчунај проценат евроазијске траве у свакој смеси.

б) Чија смеса има већи проценат евроазијске траве?

6. Александар и Марко су помешали пића за забаву.

Александар је помешао 1,8 l воћног сока са 12 литра воде.

Марко је помешао 2,5 литра воћног сока са 17,5 литра воде.

Израчунај проценат воћног сока у сваком пићу.

7. Маријана има 10 година, а Андреа има 7 година.

Њихова бака је за њих припремила џепарац.

Она предлаже два начина на које они могу да поделе новац.

Први начин је да поделе према размери њихових година.

Други начин је да поделе према броју слова у њиховим именима.

Шта мислиш, који је начин погоднији за Маријану?
Објасни зашто.

Прво израчунај колики би део добила са сваким од метода. Затим их упореди коришћењем децималних бројева или процената.

8. Дате су четири размере:

21 : 35 : 14 36 : 60: 24 27 : 45 : 15 45 : 75 : 30

Три од ове четири размере су еквивалентне,
а једна се разликује од њих.

Упрости сваку размеру.

Израчунај које су размере еквивалентне, а које се разликују од осталих.

Прикажи цео поступак.

6.5 Пропорционалност



Историјски гледано, различите државе су развиле сопствене валуте, односно сопствене монетарне системе.

Неке валуте, као амерички долар ($), евро (€) или енглеска фунта (£), добро су познате и имају нашироко препознатљиве симболе.

Највећи број држава има банке или мењачнице у којима се врши замена једне валуте у другу. Ова замена се заснива на чињеници да су валуте међусобно директно пропорционалне.

Банке или мењачнице се често налазе на пристаништима, аеродромима и главним железничким станицама, где људи углавном улазе у земљу.

Директна пропорција

Ако је однос (количник) две величине увек исти, за те величине кажемо да су **директно пропорционалне**.

На пример, ако аутомобил користи гориво уз константну потрошњу, пут који ће аутомобил прећи директно је пропорционалан количини потрошеног горива. Када возимо четири пута дуже, потрошићемо четири пута више горива.

За решавање највећег броја задатака који укључују директну пропорцију, можемо да користимо множење или дељење.

За решавање оваквих задатака користимо графике.

Понекад је боље да користимо однос двеју величина.

Пример 1

Ангел је возио 144 km и потрошио 9 литара горива.

Израчунај колико горива ће му бити потребно за 400 km.

За 144 km потроши се 9 литара горива.

За 1 km потроши $\frac{9}{144}$ литара горива.

Јединични метод: Делимо да бисмо нашли количину која се троши за 1 km, а затим множимо да бисмо добили решење.

За 400 km ће се потрошити $\frac{9}{144} \cdot 400$

$$= \frac{9 \cdot 400}{144}$$

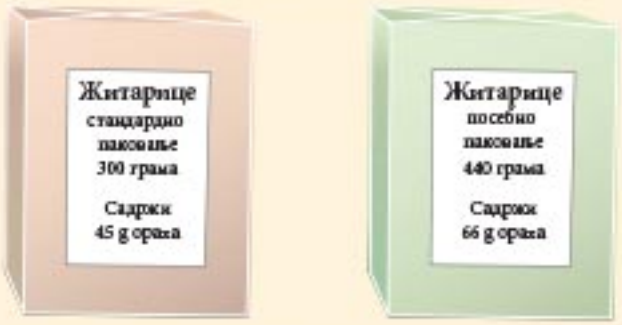
$$= \frac{3600}{144}$$

$$= 25$$

Ангелу ће бити потребно 25 литара горива.

Пример 2

На слици су показане две кутије житарица за доручак.



Да ли је маса ораха у сваком паковању директно пропорционална укупној маси паковања?

Однос ораха и укупне масе паковања је:

Стандардно паковање $45 : 300 = 3 : 20$ Подели са 15 да упростиш размеру.

Посебно паковање $66 : 440 = 3 : 20$ Подели са 22 да упростиш размеру.

Паковања имају исти однос масе ораха и укупне масе.

Маса ораха је директно пропорционална укупној маси паковања.

Пример 3

Теа добија 624 денара за осмочасовни рад.

Линдита добија 390 денара за петочасовни рад.

Израчунај да ли су оне подједнако плаћене за један час.

За сваку од њих надокнада је директно пропорционална броју радних часова.

Сума за један час за сваку од њих је:

Теа	$624 : 8 = 78$	Теа је плаћена 78 денара за час.
Линдита	$390 : 5 = 78$	Линдита је плаћена 78 денара за час.

Обе су плаћене исто за један час.

Стопе размене

Реч „стопа" користимо да бисмо описали пропорционалност различитих јединица мера.

Општа врста стопе је девизни курс.

Суме новца код две различите валуте су директно пропорционалне.

Пример 4

Ања је разменила 120 $ у евре и добила је 91,20 €.

а) Израчунај девизни курс за размену долара у евре.

У исто време је Коста разменио 250 $ у евре.

б) Израчунај колико је он евра добио.

а) Девизни курс је вредност добијена за 1 долар.

$120\ \$ = 91{,}20\ €$

$1\ \$ = 91{,}20\ € : 120$

$= 0{,}76\ €$

Девизни курс је $1 = 0{,}76€$

б) Користимо девизни курс под **а)**:

$250 \cdot 0{,}76 = 190$

Коста је добио 190 €.

Задаци

1. 7 метара платна кошта 1729 денара.

Израчунај колико треба да се плати за 12 метара платна по истој цени.

2. 3 килограма брашна кошта 102 денара.

Израчунај колико кошта 5 килограма брашна по истој цени.

3. Дејан је добио 935 денара за $5\frac{1}{2}$ часова рада.

Колико ће добити ако ради 8 часова?

4. 55 литара горива кошта 5280 денара.

Колико треба да се плати за 68 литара истог горива?

5. x и y су две променљиве.

Када је $x = 12$, $y = 40$

Када је $x = 30$, $y = 100$

Дали су x и y директно пропорционални? Објасни одговор.

6. Потребно је да упоредимо две тегле џема од јагода.



Мала тегла џема садржи 225 g јагода у 500 g џема.

Велика тегла џема садржи 324 g јагода у 720 g џема.

Да ли је маса јагода директно пропорционална укупној маси џема?

Објасни одговор.

7. Табела приказује количине шећера у кутијама са различитим паковањима житарица.

	Паковање А	Паковање Б	Паковање В	Паковање Г
Маса шећера	75 g	150 g	100 g	54 g
Маса житарица	500 g	1 kg	700 g	360 g

а) Израчунај проценат шећера у сваком паковању житарица.

б) Да ли је маса шећера директно пропорционална маси житарица?

Ако су величине директно пропорционалне, онда ће проценти бити једнаки.

8. Антонија је добила 1440 денара за осмочасовни рад.

Стефи је добила 1936 денара за једанаесточасовни рад.

а) Израчунај колико је плаћена свака за 1 час рада.

б) Да ли су оне подједнако плаћене за један час?

9. Девизни курс евра према денару је 1 € = 61,69 денара.

а) Претвори 120 € у денаре.

б) Претвори 200 денара у евре.

Заокругли решења на најближи денар или цент.

10. Андреј живи у Кавадарцима и за време одмора жели да посети своју родбину у Канади.

Он је разменио 37700 денара у канадске доларе на почетку одмора.

Курс размене канадског долара и денара је 1 канадски долар (CAD) = 41,97 денара.

а) Израчунај колико је канадских долара добио Андреј.

На крају одмора му је остало 65 канадских долара.

Претворио их је у денаре по истом курсу.

б) Израчунај колико је денара добио, заокругљено на најближи денар.

11. Јован и Елена се припремају за путовање у САД.

Јован је претворио 42205 денара у 435 $.

Елена је претворила 30385 денара по истом девизном курсу, заокругљеном на 2 децимална места.

Израчунај колико долара је она добила. Заокругли на два децимална места.

12. На почетку одмора на Црном мору у Бугарској, Стојан је разменио 500 € у 980 бугарских лева.

На крају одмора му је остало 100 лева.

Он је претворио левове у евре по истом девизном курсу.

Употреби оригиналне износе за израчунавање стопе конверзије евра у левове.

Израчунај колико евра је добио, заокругљено на најближи цео број.

13. У онлајн огласу један рачунар се продаје за 240 £ или за 375 $.

Девизни курс је 1$ = 0,61 £.

Израчунај да ли је рачунар јефтинији у доларима или у фунтама. Заокругли на два децимална места.

Можеш да претвориш у доларе или у фунте.

14. Дејан је планирао да иде у Лондон као туриста.

Он је у банци разменио 76320 денара за фунте по девизном курсу 1£ = 79, 50 денара.

Недељу дана пре путовања прихватио је предлог туристичке агенције да уместо у Лондон, оде у Париз по знатно повољнијој цени.

Он је разменио све фунте у евре по девизном курсу 1 £ = 1,19 €.

а) Израчунај колико евра он има сада. Заокругли на два децимална места.

б) Курс за размену денара у евре је 1 € = 61,69 денара.

Израчунај колико евра би имао Дејан да је денаре директно претворио у евре.

Заокругли на два децимална места.

Примена директне пропорције у претварању империјалних мерних јединица

Миље и километри

Веза између миља и километара је:

8 километара = 5 миља

Да бисмо претворили километре у миље, делимо са 8 и множимо са 5.

Да бисмо претворили миље у километре, делимо са 5 и множимо са 8.

Пример 5

Петров аутомобил може да пређе око 70 миља пре него потроши сво гориво.

Петар је приметио знак поред ауто-пута.

Да ли ће стићи до бензинске пумпе пре него што му нестане горива?



Начин 1: Миље претварамо у километре тако што делимо са 5, а затим множимо са 8.

$70 : 5 = 14$

$14 \cdot 8 = 112$

Највероватније је да ће остати без горива после 112 километара.

Пошто је бензинска пумпа удаљена 120 километара, највероватније је да неће успети да стигне до бензинске пумпе.

Начин 2: Километре претварамо у миље тако што делимо са 8, а затим множимо са 5.

$120 : 8 = 15$

$15 \cdot 5 = 75$

Бензинска пумпа је удаљена 75 миља.

Петар има бензина за још 70 миља, па је највероватније да неће успети да стигне до бензинске пумпе.

Друге империјалне мерне јединице

Постоје империјалне мерне јединице за дужину, масу и запремину, као и за многе друге величине.

За све мерне јединице, осим за миље и километре, коефицијент претварања биће дат у задатку.

Пример 6

Филип има аутомобил са резервоаром који садржи 9 галона горива.

Колика је запремина овог резервоара за гориво у литрима?

1 галон је око 4,5 литара.

Значи, 1 галон = 4,5 литара

9 галона = $4,5 \cdot 9$ литара = 40,5 литара.

Његов резервоар за гориво садржи око 40,5 литара.

Пример 7

Мила зна да је њена гаража дугачка 5,2 метра.

Она је видела ову рекламу за мердевине.



а) Израчунај дужину Милине гараже у педљима.

б) Открий да ли она може да стави мердевине у гаражу.

1 педаљ је око 0,305 метара

а) 0,305 метра = 1 педаљ

1 метар = $1 : 0,305 = 3,279$ педаља

$5,2$ метара = $3,279 \cdot 5,2 = 17,05$ педаља

Њена гаража је дугачка мало више од 17 педаља.

Ово је унитаран метод пропорционалности. Прво налазимо колико педаља има у 1 метру.

б) Мердевине су дугачке 16 педаља.

Оне су краће од 17 педаља.

Мердевине ће стати у њену гаражу.

Задаци

1. Јован је отишао на одмор.

У току пет дана је пешачио 21 миљу, 18 миља, $15\frac{1}{2}$ миље и 13 миља.

а) Израчунај укупан број миља које је препешачио.

б) Претвори растојање у километре.

2. Матеј је нашао стари шраф дугачак 6 инча у свом подруму.



Претвори дужину шрафа у центиметре.

1 инч је око 2,54 центиметара.

3. Један резервоар за гориво садржи 150 литара.

Колико је то галона?

1 галон је око 4,5 литара.



4. Марија има посуду од пет литара у којој је сок од јабука.

Треба да га сипа у чаше, од којих свака садржи $\frac{1}{2}$ пинте.

Израчунај колико се чаша може напунити соком из посуде.

1 литар је око 1,75 пинти.

5. Никола има телесну масу 198 фунти.

Израчунај његову масу у килограмима.

1 килограм је око 2,2 фунте.

6. Трка за олимпијски маратон је првобитно била дугачка 26 миља и 385 јарди.

Израчунај дужину у километрима.

У једној миљи има 1760 јарди.

385 јарди је $\frac{385}{1760}$ миља.

Претвори разломак у децимални број пре него што израчунаш колико је то километара.

7. Тодор има телесну масу од 93,6 килограма.

Никола има телесну масу од 15 камена и 5 фунти.

а) 1 килограм је приближно 2,2 фунте.

Користи ово да претвориш масу Тодора у фунте.

Помножи са 2,2 да претвориш килограме у фунте.

б) Има 14 фунти у 1 камену.

Користи ово да израчунаш Николину масу у фунтама.

в) Запиши који од њих има већу телесну масу и за колико. Решење заокругли на најближу фунту.

Задаци за понављање

1. Одреди вредност за:

а) $\sqrt{361}$ **б)** $\sqrt{121}$ **в)** $\sqrt[3]{64}$ **г)** $\sqrt[3]{27}$

2. Процени вредност за:

а) $\sqrt{28}$ **б)** $\sqrt[3]{40}$ **в)** $\sqrt{300}$ **г)** $\sqrt[3]{85}$

3. Израчунај вредност израза:

а) $5+4\cdot 8$ **б)** $43-5\cdot 6+2$ **в)** $12\cdot(3+2)$

г) $100:5^2+7$ **д)** $3^3+(12-2\cdot 4)$ **ђ)** $(-3)^2+2^2\cdot 5^2$

е) $12+2^3:4-3$ **ж)** $6^2+4\cdot(5+2^2)$

4. Употреби заграде да би следеће једнакости биле тачне.

а) $3^2\cdot 4+1=45$ **б)** $144:8+2^2\cdot 2=24$ **в)** $3+2\cdot 5^2-9=80$

5. Елисавета је платила рачун за бензин 3200 денара и накнадно још 6% за порез.

Колико је платила укупно?

6. Сто се продаје по цени умањеној за 12,5%.

Његова првобитна цена је 3600 денара.

Колика је умањена цена стола?

7. Димитар је добио 300 денара камате за своју уштеђевину.

Он је имао уштеђевину од 4800 денара.

Колико износи каматна стопа у процентима?

8. Број људи који су посетили биоскопе 2012. години износи 25000.

Године 2013, тај број се увећао до 27000.

Колики је проценат повећавања?

9. У табели су приказани Мартинови резултати за неколико школских тестова.

Предмет	Бодови	Укупно бодова на тесту
математика	25	40
историја	21	30
географија	48	60
биологија	52	80

Из ког предмета је Мартин постигао најбоље резултате? Објасни поступак решавања.

10. Цена једне тастатуре је умањена за 40%.

Њена цена је 570 денара.

Колика је била цена пре умањења?

11. Карте за воз су поскупеле 25%.

Сада карта за воз кошта 360 денара.

Колика је била цена карте пре поскупљења?

12. Дате размере запиши у најједноставнијем облику.

а) 12 : 21 **б)** 24 : 56 **в)** 72 : 27

г) 21 : 33 : 15 **д)** 48 : 28 : 36

13. Дате размере запиши у најједноставнијем облику.

а) 4 дана : 2 недеље **б)** 1,5 kg : 500 g

в) 750 ml : 2 l **г)** 8 mm : 2 cm

14. Подели следеће величине у датом размеру.

а) 320€ у односу 5 : 3 **б)** 160 cm у односу 7 : 1 **в)** 176$ у односу 8 : 3

15. Углови једног четвороугла су у односу 3 : 4 : 6 : 7

Израчунај величину највећег угла.

16. Комад дрвета дугачак 2,4 m подељен је на два дела у односу 3 : 2.

Израчунај дужину два нова комада.

17. У кутији се налазе црвене и црне лоптице у односу 5 : 2.

Који је део црвених лоптица? Запиши као разломак.

18. У једном аутобусу $\frac{3}{4}$ особа су мушкарци.

Израчунај однос мушкараца и жена.

19. Ана и Горан деле једну награду у односу 5 : 2.

Ана је примила 3690 денара више од Горана.

Колика је била укупна награда?

20. Упрости следеће размере и утврди да ли су еквивалентне.

а) 28 : 35 и 36 : 45 **б)** 54 : 36 и 72 : 36 **в)** 63 : 27 и 28 : 12

21. **а)** Запиши следеће размере у облику n : 1. Ако је неопходно, заокругли решења на једно децимално место.

i 12 : 8 **ii** 5 : 3 **iii** 5 : 4 **iv** 9 : 6 **v** 8 : 3

б) Које су две размере под **а)** еквивалентне размере?

22. Бојан је помешао 375 ml воћног сока са 3 l воде.

Ања је помешала 600 ml воћног сока са 5 l воде.

а) Израчунај проценат воћног сока у свакој смеси.

б) У чијој смеси је проценат воћног сока већи?

23. На екскурзију у планину отишао је 51 ученик и 4 наставника.

На другу екскурзију на море отишло је 87 ученика и 7 наставника.

а) Израчунај размеру ученика у односу на наставнике за прву екскурзију у форми n : 1.

б) Израчунај размеру ученика у односу на наставнике за другу екскурзију у форми n : 1.

в) Која екскурзија има већи однос ученика према наставнику?

24. 8 метара једног материјала кошта 392 денара.

Израчунај цену за 15 метара материјала који се продаје по истој цени.

25. Наташа и Мирјана су на радном месту плаћене подједнако за 1 сат рада.

Наташа је добила 532 денара за седмочасовни рад.

Израчунај колико ће добити Мирјана за петочасовни рад.

26. x и y су две променљиве.

Када је $x = 45$, $y = 12$

Када је $x = 30$, $y = 8$

Да ли су x и y директно пропорционалне величине? Објасни решење.

27. Девизни курс између америчког долара ($) и енглеске фунте (£) је 1$ = 0,76£.

а) Претвори 300 $ у фунте.

б) Претвори 285 £ у доларе. Решења заокругли на две децимале.

28. Јане, Даме и Ненад пу тују из Скопља у Београд.

Они су разменили македонске денаре у српске динаре према истом девизном курсу.

Јане је разменио 5000 денара у 9750 динара.

а) Даме је разменио 6000 денара у динара.

Израчунај колико динара је добио Даме.

б) Ненад је разменио одређену суму денара и за њих добио 7800 динара.

Колико денара је разменио Ненад?

29. Растојање од Скопља до Кичева је 118 km.

Растојање од Скопља до Пехчева је 76,8 миља.

а) Претвори растојање од Скопља до Пехчева у километре. Решење заокругли на најближи цео број.

б) Који град је даље од Скопља, Пехчево или Кичево? За колико?

30. Индекс телесне масе (ИТМ) је мера ухрањености људског организма.
Формула за ИТМ је:

ИТМ $= \frac{m}{h^2}$, где је m маса у килограмима, а h је висина у метрима.

а) Мерита је висока 1,48 m и има масу од 50 kg.

Израчунај њен ИТМ. Решење заокругли на једно децимално место.

б) Марија је висока 6 педаља и има масу од 200 фунти.

I Претвори њену висину у метре (1 педаљ = 30 центиметара)

II Претвори њену масу у килограме (1 килограм = 2,2 фунте)

III Израчунај њен ИТМ. Решење заокругли до једног децималног места.

7 Алгебра и решавање проблема

Наставни циљеви

- Замена позитивних и негативних бројева у изразима и формулама.
- Изражавање променљиве преко других променљивих у датој једначини; извођење једноставних формула; коришћење математичких формула или формула за друге предмете.
- Састављање табеле вредности и цртање графика линеарних функција, где је у имплицитно додата у односу на x; свођење једначине у форму $y = mx + c$; познавање значења за m и налажење нагиба код праволинијског графика.
- Прецизно идентификовање, организација, представљање и тумачење информације у писменом облику, табеларно, графички и дијаграмом.
- Састављање функција које произилазе из свакодневних проблема; цртање и тумачење њихових графика.
- Цртање прецизних математичких дијаграма и графика.
- Коришћење алгебарских метода за решавање проблема повезаних са директном пропорционалношћу, повезивање решења са графицима једначина.
- Налажење приближних решења једноставног система линеарних једначина преко налажења пресечне тачке на њиховим графицима.
- Решавање једноставног система од две линеарне једначине са две непознате, елиминацијом једне непознате.
- Разматрање и процена ефикасности различитих стратегија и приступа и побољшавање поступка решавања.
- Одређивање производа два линеарна израза у облику $x \pm n$ и упрошћавање добијеног квадратног израза.
- Коришћење системских метода пробе да би се добила приближна решења једначина као што је $x^2 + 2x = 20$.
- Заокругљивање бројева до одређеног броја децималних места; заокругљивање користи да би се дошло до решења проблема са одређеним степеном тачности.
- Разумевање и коришћење знакова неједнакости ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$); састављање и решавање линеарне неједначине са једном непознатом; представљање решења на бројевној правој.

7.1 Извођење формула и замена бројева у формулама

Енергија и маса

Позната је формула која се користи у науци $E = mc^2$.

Формула показује да постоји једнакост између енергије, E, и масе, m, и да се једна може претворити у другу помоћу константе c^2, где је c брзина светлости.

Научник Алберт Ајнштајн открио је ову везу на почетку XX века.

У овој теми ћемо користити различите формуле које имају примену у математици и у науци.



Да се подсетимо како **замењујемо** вредности у **формули** и како изводимо формуле.

Пример 1

$P = \frac{4h^2 + 5f}{2h}$

а) Израчунај вредност P, ако је $f = 2$ и $h = -5$.

б) Израчунај вредност f, ако је $P = 8$ и $h = 3$.

а) $P = \frac{4h^2 + 5f}{2h}$ Слова замењујемо датим бројевима.

$= \frac{4 \cdot (-5)^2 + 5 \cdot 2}{2 \cdot (-5)}$ $4 \cdot (-5)^2 = 4 \cdot (-5) \cdot (-5) = 4 \cdot 25 = 100$

$= \frac{100 + 10}{-10}$

$= \frac{110}{-10}$ Знамо да је $+ : - = -$

$= -11$

б) $P = \frac{4h^2 + 5f}{2h}$ Слова замењујемо датим бројевима.

$8 = \frac{4 \cdot (3)^2 + 5f}{2 \cdot 3}$ $4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 9 = 36$

$8 = \frac{36 + 5f}{6}$ Решавамо једначину.

$48 = 36 + 5f$ Обе стране множимо са 6.

$12 = 5f$ Одузимамо 36 од обе стране.

$f = 2{,}4$ Обе стране делимо са 5.

Пример 2

Једна чоколада има масу од 23 грама, а један колач има масу од 18 грама.

На столу има x чоколада и $(x - 2)$ колача.

Запиши формулу у грамима за укупну масу T, за чоколаде и колаче.

Маса x чоколада је $= 23x$

Маса $(x - 2)$ колача $= 18(x - 2)$

$T = 23x + 18(x - 2)$ Ослобађамо се заграда.

$T = 23x + 18x - 36$ Групишемо сличне чланове.

$T = 41x - 36$

Задаци

1. Израчунај вредност y у свакој формули ако је:

I $x = 10$ II $x = -5$ III $x = -10$

а) $y = 5x - 12$ **б)** $y = \frac{x}{5} + 7$ **в)** $y = \frac{5x - 1}{2}$ **г)** $y = 50 - 4x$

д) $y = 2x - x^2$ **ђ)** $y = 5x^2 - 1$ **е)** $y = x^2 + 5x + 4$ **ж)** $y = 3x^2 - 5x - 2$

2. Израчунај вредност p у свакој формули ако је:

I $a = 2, b = 5$ II $a = 7, b = -3$ III $a = -1, b = -4$

а) $p = 2ab$ **б)** $p = 5 - ab$ **в)** $p = a - 2b$ **г)** $p = 7a - 3b + 6$

д) $p = a^2 + 2b$ **ђ)** $p = a(2b - 5)$ **е)** $p = a^2 + 2ab$ **ж)** $p = 3a^2 - 2ab - b^2$

3. Израчунај вредност T у свакој формули ако је:

I $a = 3, b = 2, c = 5$ II $a = -1, b = 4, c = 3$ III $a = -2, b = -3, c = -4$

а) $T = ab + c$ **б)** $T = 3a + 2b - 4c$ **в)** $T = (2a + b - c)^2$ **г)** $T = 2a^2 + 5b - c$

4. Израчунај вредност y у свакој формули ако је: I $x = 2$ II $x = -2$

а) $y = \frac{x - 4}{4}$ **б)** $y = \frac{x + 3}{x - 1}$ **в)** $y = 8 - \frac{6}{x}$ **г)** $y = \frac{x^2 + 1}{1 - x}$

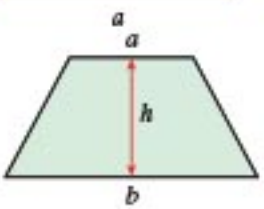
5. Формула за обим L правоугаоника је $L = 2a + 2b$



а) Израчунај вредност L, ако је $a = 7{,}5$ и $b = 3{,}6$.

б) Израчунај вредност a, ако је $L = 50$ и $b = 4{,}7$.

6. Формула за површину P трапеза је $P = \frac{1}{2}(a + b)h$



а) Израчунај вредност P, ако је $a = 7$, $b = 6$ и $h = 8$.

б) Израчунај вредност h, ако је $P = 40$, $a = 3$ и $b = 5$.

в) Израчунај вредност b, ако је $P = 60$, $a = 4$ и $h = 12$.

7. $F = \frac{mv - mu}{t}$ је формула која се користи у физици.

а) Израчунај вредност F, ако је $m = 5$, $v = 8$, $u = 3$ и $t = 2$.

б) Израчунај вредност F, ако је $m = 7$, $v = 10$, $u = -2$ и $t = 5$.

в) Израчунај вредност m, ако је $F = 20$, $v = 9$, $u = 4$ и $t = 2$.

8. За један концерт продато је x карата, свака по 350 денара, и $(x + 18)$ карата, свака по 480 денара.

Запиши формулу за укупну цену продатих карата.

9. Један часопис кошта b денара, а једне новине коштају $b - 3$ денара.

Запиши формулу за суму која треба да се плати за 4 часописа и 8 новина.

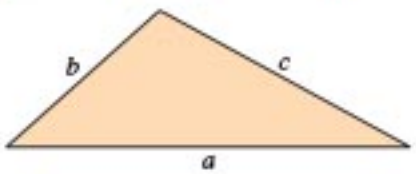
10. Елена је купила x свећа.

Једна свећа кошта 30 денара. Она је платила новчаницом од 500 денара.

Запиши формулу за кусур К који је добила Елена.

11. Херонова формула се може користити да би се израчунала површина P троугла ако су познате дужине трију страна.

На интернету можеш да сазнаш више о Херону.



$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

где је $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Помоћу ове формуле израчунај површину троугла чије су странице 5 cm, 7 cm и 10 cm.

12. На дијаграму је приказан торус.

Торус је 3Д-форма која се формира када се мања кружница полупречника r ротира по дужини веће кружнице са полупречником R.



Формуле за запремину V и површину P торуса, су:

$$V = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2 \quad \text{и} \quad P = 4 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r$$

а) Израчунај вредност V и P, ако је $R = 7$ cm и $r = 4$ cm.

б) Одреди вредност за V, P и r.

Замена у изразу

Замена у изразу је поступак када на место слова у изразу записујемо дате бројеве.

Након извршене замене, потребно је да израчунамо вредност израза, водећи притом рачуна о редоследу извршавања операција.

1. Израчунавамо изразе у заградама.

2. Затим израчунавамо степене.

3. Затим делимо и множимо.

4. На крају израчунавамо сабирање и одузимање.

Заграде
Степени
Дељење
Множење
Сабирање
Одузимање

Пример 3

Ако је $x = 3$ и $y = -4$, израчунај вредност за:

а) $5x + 3y$ **б)** $x^2 + y^2$ **в)** $2x^2 + y$ **г)** $4xy + 3y^2$

а) $5x + 3y = (5 \cdot 3) + (3 \cdot (-4))$
$= 15 + (-12)$
$= 3$

б) $x^2 + y^2 = 3^2 + (-4)^2$
$= 9 + 16$
$= 25$

в) $2x^2 + y = 2 \cdot 3^2 + (-4)$
$= 18 - 4$
$= 14$

г) $4xy + 3y^2 = (4 \cdot 3 \cdot (-4)) + 3 \cdot (-4)^2$
$= -48 + 48$
$= 0$

Задаци

1. Ако је $x = 7$, израчунај вредност израза:

а) $5x - 3$ **б)** $x^2 + 1$ **в)** $8 - 2x$ **г)** $3x^2$

д) $2x^2 - 4$ **ђ)** $\frac{x+3}{5}$ **е)** $\frac{2x+1}{5x-5}$ **ж)** $\frac{x^2+1}{x-4}$

з) x^3 **и)** $(2x)^2 + 5x$ **ј)** $2x + \frac{x}{14}$ **к)** $x^2 - \frac{21}{x}$

2. Ако је $x = 3$ и $y = 5$, израчунај вредност израза:

а) $2x + 4y$ **б)** $5x - 3y$ **в)** $3xy$ **г)** $x^2 + y^2$

д) $2x^2y$ **ђ)** $3xy^2 - 4x$ **е)** $\frac{x+y}{2}$ **ж)** $\frac{4xy}{5}$

з) $\frac{x^3}{y+4}$ **и)** $(2xy)^2$ **ј)** $(x-y)^2$ **к)** $\left(\frac{3x}{2y}\right)^2$

3. Ако је $a = 2$, $b = -3$ $c = -4$, израчунај вредност израза:

а) $2a + 3b$ **б)** abc **в)** $ab + c$ **г)** $a^2 + b^2 + c^2$

д) $2b^2 + a$ **ђ)** $5ac$ **е)** $b^3 + 1$ **ж)** $5c^2 - b$

з) $(ab)^2 + c$ **и)** $\frac{c}{a} + b$ **ј)** $(a + b - c)^2$ **к)** $\left(\frac{5ab}{c+2}\right)^2$

4. Одреди x тако да сва три израза имају исту вредност.

$x^2 + 13$	$2x^2 - 12$	$3x^2 + 4x - 17$

7.2 Изражавање променљиве

У формули $P = ax + b$, променљива P је **изражена** преко променљивих a, x и b.

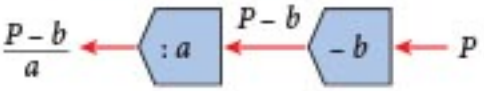
Ако хоћемо да изразимо x из исте формуле, потребно је да изведемо ту формулу користећи дату формулу. То можемо да урадимо на следећа два начина.

Први начин: Метод инверзне функционалне машине

Функционална машина је:



Инверзна функционална машина је:



Према томе, $x = \frac{P-b}{a}$

Други начин: Еквивелентне трансформације

$P = ax + b$

$-b$ $\qquad$ $-b$

$P - b = ax$

$:a$ $\qquad$ $:a$

$\frac{P-b}{a} = x$

При извођењу формула користимо иста правила која важе за решавање једначина.

Користимо инверзне операције.

Пример 1

Изрази x у формули $a(bx - c) = d$.

$a(bx - c) = d$ — Ослобађамо се заграда.

$abx - ac = d$ — Додајемо ac двема странама.

$abx = d + ac$ — Обе стране делимо са ab.

$x = \frac{d+ac}{ab}$

Задаци

1. Изрази x у следећим формулама.

а) $x + 2 = y$ **б)** $x + a = b$ **в)** $x - 5 = pq$ **г)** $x - p = 3q$

д) $t = x - 2u$ **ђ)** $v^2 = x + y$ **е)** $a^2 + x = b$ **ж)** $x - a^2 = 2a$

з) $x - p = q + r$ **и)** $b - c = x + a$ **ј)** $ab + x = c$ **к)** $r = x - pq$

2. Изрази y у следећим формулама.

а) $5y = a$ **б)** $ay = b$ **в)** $a\,y = 2e$ **г)** $3by = c$

д) $pq\,y = r$ **ђ)** $ay = \pi r^2$ **е)** $3y = 2a + b$ **ж)** $cy = a - b$

з) $5y = 9x - 15$ **и)** $x\,y = x + 2$ **ј)** $x\,y = fg - 5$ **к)** $7y = 5\,x - 1$

л) $y(a + b) = c$ **љ)** $y(p - 3q) = 2r$ **м)** $y(2p - q) = 5p + 2q$ **н)** $y(3 - a) = a^2 + b^2$

3. Изрази x у следећим формулама.

а) $2x + a = b$ **б)** $5x - q = r$ **в)** $y = 2x - 5$ **г)** $p = 3x + 2q$

д) $c = 7x + 4y$ **ђ)** $y = mx + c$ **е)** $2x + y = z$ **ж)** $4x - y = 8$

з) $ax + b = c$ **и)** $2ax - b = 10$ **ј)** $3x - 4 = y$ **к)** $a^2 + b^2x = c^2$

л) $abx + c = d$ **љ)** $3fx - g^2 = h^2$ **м)** $8x - 2f = 5g + h$ **н)** $ab + c = 5d + 2x$

4. Иво и Дарко су хтели да изразе x из формуле $w = 2(x + b)$

Иво је написао:

$$w = 2(x + b)$$
$$w = 2x + 2b$$
$$w - 2b = 2x$$
$$\frac{w - 2b}{2} = x$$

Дарко је написао:

$$w = 2(x + b)$$
$$\frac{w}{2} = x + b$$
$$\frac{w}{2} - b = x$$

Који је од њих двојице у праву? Објасни свој одговор.

5. Изрази x у следећим формулама.

а) $3(x + 2) = y$ **б)** $a(x + b) = c$ **в)** $a = 8(x - b)$ **г)** $3p = 5(x + 2q)$

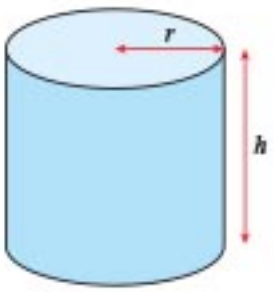
д) $2a = c(x - b)$ **ђ)** $4g(h + x) = h$ **е)** $p = q(2 + x)$ **ж)** $a^2(x - b) = c^2$

з) $p(x + 5q) = 8$ **и)** $ab(a + x) = c$ **ј)** $a(2x + 3b) = c$ **к)** $a^2(3 + 4x) = b$

6. $v = u + at$ је формула која се користи у физици.

а) Изрази u **б)** Изрази a **в)** Изрази t

7. Формула за површину P ваљка је $P = 2\pi rh + 2\pi r^2$, где је r полупречник, а h је висина.

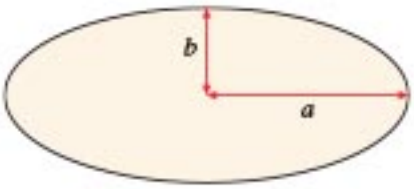


а) Израчунај површину ако је $r = 5$ cm и $h = 8$ cm.
Запиши решење без израчунавања вредности π.

б) Изрази h у формули.

в) Одреди вредност h ако је $P = 600\ cm$ и $r = 8\ cm$.
Заокругли решење на три значајне цифре.

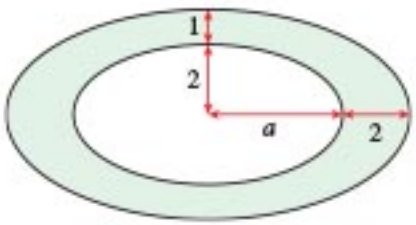
8.



На цртежу је приказана елипса.

Формула за одређивање површине P елипсе је $P = \pi ab$.

а) Покажи да се површина P обојене области на другом цртежу може израчунати формулом $P = \pi a + 6\pi$.



б) Изрази a у формули $P = \pi a + 6\pi$.

в) Користи резултат под **б)** да одредиш вредност a, ако је површина обојеног дела 30 cm².

Запиши решење заокругљено на 3 значајне цифре.

Формуле са негативним коефицијентима испред x

Формула $a = b - 3x$ има негативни коефицијент испред x.

Лакше је када радимо са позитивним коефицијентима испред x. У овом случају је потребно да пребацимо члан x са друге стране једначине да би постао позитиван.

Пример 2

Изрази x у формули $a = b - 3x$.

$$a = b - 3x$$ Додајемо $3x$ на обе стране.

$$a + 3x = b$$ Одузимамо a са обе стране.

$$3x = b - a$$ Обе стране делимо са 3.

$$x = \frac{b - a}{3}$$

Задаци

1. Изрази x у следећим формулама.

а) $y = 2 - x$ **б)** $a = b - x$ **в)** $p = 2q - x$ **г)** $3pq - x = 7$

д) $a^2 - x = b^2$ **ђ)** $p + q = r - x$ **е)** $2a - 3b = 5c - x$ **ж)** $a = b + c - x$

з) $2f = g - 2x$ и) $f - gx = h$ ј) $mn = 8 - 5x$ к) $p^2 = 2a - 3x$

л) $a^2 + ab = b - cx$ љ) $5b^2 - a^2x = c$ м) $4y - 3x = 5z$ н) $m^2 - 2mnx = n^2$

2. Изрази y у следећим формулама.

а) $9 = 2(x - y)$ б) $d = 5(2 - y)$ в) $a = 3(b - y)$ г) $h(g - y) = a$

д) $a(b - y) = c$ ђ) $h(h - y) = c$ е) $a^2 = b(c - y)$ ж) $p = q(r + t - y)$

з) $5(a^2 - y) = b$ и) $8(pq - 2y) = r$ ј) $7p = 2(q - 3y)$ к) $2fg(3 - y) = 4h$

3. $Ft = mv - mu$ је формула која се користи у физици.

а) Изрази t б) Изрази v в) Изрази u

Формуле са разломцима

Да би променили распоред у формулама које укључују разломке, потребно је да знамо правила алгебарских разломака.

Пример 3

Изрази x у формули $\frac{x-a}{2} = y$

$\frac{x-a}{2} = y$ Обе стране множимо са 2.

$x - a = 2y$ Додајемо a двема странама.

$x = 2y + a$

Пример 4

Изрази x у формули $\frac{b}{4} = \frac{5a}{x}$

$\frac{b}{4} = \frac{5a}{x}$ На свакој страни се налази по један разломак,

$b \cdot x = 4 \cdot 5a$ па користимо унакрсно множење.

$bx = 20a$

$x = \frac{20a}{b}$

Задаци

1. Изрази x у следећим формулама.

а) $\frac{x}{3} = y$ б) $\frac{x}{a} = p$ в) $\frac{x}{7} = ab$ г) $h = \frac{x}{g}$

д) $p^2 = \frac{x}{q}$ ђ) $a + 2 = \frac{x}{c}$ е) $\frac{x}{4} = p + q$ ж) $\frac{x}{5} = 2a - b$

з) $\frac{x}{2+y} = 4$ и) $\frac{x}{a-b} = c$ ј) $\frac{x}{a^2+c^2} = b^2$ к) $\frac{x}{2g+3h} = 5f$

2. Изрази x у следећим формулама.

а) $p=\frac{x+7}{3}$ **б)** $\frac{x-8}{5}=y$ **в)** $\frac{x-a}{b}=c$ **г)** $\frac{x-2m}{5}=n$

д) $a=\frac{5-x}{4}$ **ђ)** $\frac{6-x}{a}=b$ **е)** $\frac{m-x}{2}=n$ **ж)** $ab=\frac{a-3x}{b}$

3. Изрази x у следећим формулама.

а) $\frac{3}{x}=y$ **б)** $\frac{a}{x}=t$ **в)** $\frac{2p}{x}=q$ **г)** $\frac{y}{x}=2$

д) $\frac{x}{4}=\frac{a}{b}$ **ђ)** $\frac{x}{p}=\frac{q}{r}$ **е)** $\frac{5x}{a}=\frac{2b}{c}$ **ж)** $\frac{px}{q}=\frac{q}{p}$

з) $y=\frac{a+b}{x}$ **и)** $a^2=\frac{b^2-c^2}{x^2}$ **ј)** $2ab=\frac{c+d}{x}$ **к)** $\frac{a+b}{x}=c+d$

4. Изрази x у следећим формулама.

а) $\frac{5}{x-3}=y$ **б)** $\frac{7}{x+2}=p$ **в)** $\frac{8}{3-x}=a$ **г)** $\frac{a}{x+b}=c$

д) $\frac{f}{g-x}=h$ **ђ)** $\frac{a^2}{a-x}=5b$ **е)** $\frac{m}{8-3x}=2n$ **ж)** $\frac{ab}{c-bx}=c$

5. Изрази x у следећим формулама.

а) $\frac{1}{x}+2=y$ **б)** $\frac{1}{x}-a=b$ **в)** $\frac{1}{x}-pq=p$ **г)** $\frac{1}{x}-y^2=5y$

6. Изрази x у следећим формулама.

а) $\frac{1}{2}x+5=y$ **б)** $\frac{1}{3}x-a=b$ **в)** $y=\frac{1}{2}x+c$ **г)** $p=q-\frac{x}{4}$

д) $m=n-\frac{x}{5}$ **ђ)** $y=2-\frac{x}{5}$ **е)** $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ **ж)** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=12$

7. Формула за израчунавање просте камате је $I=\frac{PRT}{100}$

а) Изрази P **б)** Изрази R **в)** Изрази T

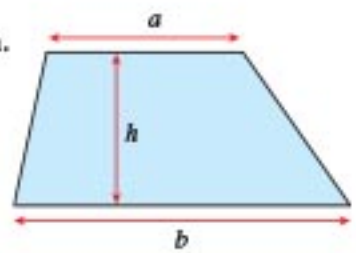
8. $s=\frac{1}{2}(u+v)t$ је формула која се користи у физици.

а) Изрази t **б)** Изрази u **в)** Изрази v

9. $s=\frac{d}{t}$ је формула која повезује брзину, пут и време.

а) Изрази го d **б)** Изрази го t

10. $P=\frac{1}{2}(a+b)h$ је формула за налажење површине P код трапеза.



а) Изрази h из формуле.

б) Израчунај h ако је $P=75\ \text{cm}^2$, a = 8 cm и $b=12$ cm.

в) Изрази b из формуле.

г) Израчунај b ако је $P=58\ \text{cm}^2$, a = 10 cm и $h=8$ cm.

11. Формула $F=\frac{9C}{5}+32$ се користи за претварање Целзијусових степена (°C) у Фаренхајтове степене (°F)

а) Покажи да формула може да се запише као $C=\frac{5(F-32)}{9}$

б) Користи формулу **а)** да одредиш вредност од C када је $F=-31$.

в) Покажи да када је C једнако -40, тада је и F једнако -40.

Формуле за степене, квадрате и квадратне корене

Важно је да запамтимо да:

ако је $x^2 = 25$

тада је $x = \pm \sqrt{25}$

$x = \pm 5$ Провера: $5^2 = 25$ ✓ и $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$ ✓

Да изразимо x из формуле $x^2 - b = a$

$x^2 - b = a$

+b +b

$x^2 = a + b$

√ √

$x = \pm \sqrt{a+b}$

Пример 5

Изрази x из формуле $ax^2 - 5 = b$.

$ax^2 - 5 = b$ Додајемо 5 на обе стране.

$ax^2 = b + 5$ Делимо обе стране са a.

$x^2 = \frac{b+5}{a}$ Тражимо квадратни корен за обе стране.

$x = \pm \sqrt{\frac{b+5}{a}}$

Запамти да ставиш знак ± пре квадратног корена.

Пример 6

Изрази x из формуле $\sqrt{2x-3} = y$.

$\sqrt{2x-3} = y$

$2x - 3 = y^2$ Квадрирамо на обе стране.

$2x = y^2 + 3$ Додајемо 3 на обе стране.

$x = \frac{y^2+3}{2}$ Делимо обе стране са 2.

Пример 7

Формула за површину круга је $P = \pi r^2$.

Изрази r из формуле.

$P = \pi r^2$ Делимо обе стране са π.

$\frac{S}{\pi} = r^2$ Тражимо квадратне корене на обе стране.

$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Зато што је r дужина, мора да буде позитиван број, па не треба да укључујемо знак ±.

Задаци

1. Изрази x из следећих формула.

а) $x^2 = a$ **б)** $x^2 = pq$ **в)** $2x^2 = y$ **г)** $x^2 + 4 = m$

д) $x^2 - 5 = 4b$ **ђ)** $x^2 + a = b$ **е)** $x^2 - 2f = g$ **ж)** $2x^2 + 3 = y$

з) $ax^2 + b = c$ **и)** $px^2 + 3q = 5r$ **ј)** $7 - x^2 = 2y$ **к)** $8 - 3x^2 = 2a$

2. Изрази x из следећих формула.

а) $\frac{x^2}{2} - 4 = y$ **б)** $\frac{x^2}{a} + b = c$ **в)** $5 - \frac{x^2}{4} = a$ **г)** $pq - \frac{x^2}{3} = r$

3. Изрази x из следећих формула.

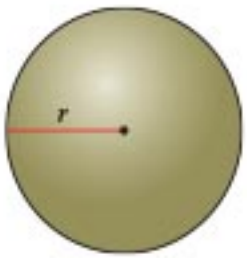
а) $\sqrt{x} = c$ **б)** $\sqrt{x} = 5p$ **в)** $\sqrt{x+2} = c$ **г)** $\sqrt{x+4} = 3a$

д) $\sqrt{x+a} = b$ **ђ)** $\sqrt{x-f} = 5$ **е)** $\sqrt{x-2m} = 3n$ **ж)** $2\sqrt{x-4} = y$

з) $a\sqrt{x} = b$ **и)** $\sqrt{ax} = b$ **ј)** $\sqrt{\frac{x}{4}} = d$ **к)** $n = \sqrt{\frac{x}{m}}$

л) $\sqrt{\frac{x+2}{5}} = q$ **љ)** $\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{c}$ **м)** $\sqrt{\frac{2}{3x}} = y$ **н)** $\sqrt{\frac{1}{x-4}} = a$

4. Формула за израчунавање површине лопте је $P = 4\pi r^2$.

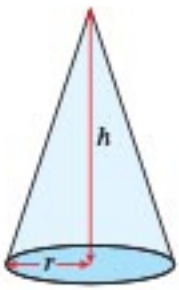


а) Изрази r из формуле.

б) Користи резултат под **а)** да одредиш вредност r када је $P = 20\ \text{cm}^2$.

Решење заокругли на 3 значајне цифре.

5. Формула за израчунавање запремине купе је $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



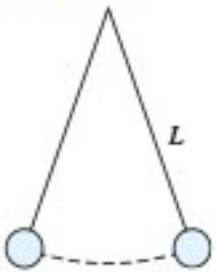
а) Изрази r из формуле.

б) Израчунај вредност r када је $V = 50\ \text{cm}^3$ и $h = 12$ cm.

Решење заокругли на 3 значајне цифре.

6. $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{10}}$

Ово је формула помоћу које се израчунава време T у секундама, за једну осцилацију клатна са дужином од L метара.



а) Препиши и допуни функционалну машину за налажење T.



б) Користи своју функционалну машину под **а)** да би нашао вредност од T када је $L = 0{,}2$ m.

Решење заокругли на три значајне цифре.

в) Прецртај и допуни инверзну функционалну машину да изразиш T из формуле.



г) Користи решење под **в)** да одредиш вредност L када је $T = 1$ секунда.

Решење заокругли на три значајне цифре.

7. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ је врло позната формула о којој ћеш учити у средњој школи.

Покажи да можеш да изразиш c,
односно да можеш да добијеш следећу: $c = \frac{b^2 - (2ax + b)^2}{4a}$

Прикажи све кораке у решавању.

7.3 Коефицијент правца графика функције

Коефицијентом правца на правој одређујемо како је искошена та права.

Права може да има позитиван, негативан и нулти коефицијент правца.

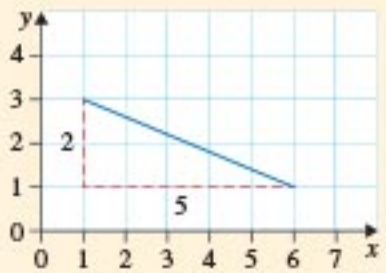


$$\text{коефицијент правца} = \frac{\text{вертикално растојање}}{\text{хоризонтално растојање}}$$



Пример

Одреди коефицијент правца који пролази кроз тачке (1, 3) и (6, 1).



Цртамо праву кроз обе тачке.

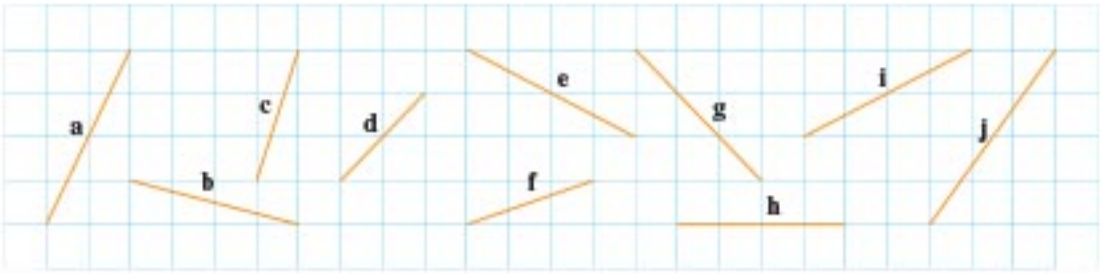
$$\text{Коефицијент правца} = \frac{\text{вертикално растојање}}{\text{хоризонтално растојање}}$$

$$\text{Коефицијент правца} = -\frac{2}{5}$$

Уочавамо да је коефицијент правца негативан.

Задаци

1. Одреди коефицијент правца датим правама.



2. Нацртај праве које повезују следеће парове тачака.

Одреди коефицијент правца за сваку праву.

а) (1, 2) и (3, 6)
б) (6, 3) и (3, 4)
в) (2, 1) и (4, 2)
г) (4, −2) и (6, 1)
д) (1, −3) и (6, −4)
ђ) (−2, −6) и (2, −4)
е) (−3, 2) и (−2, −4)
ж) (−6, −6) и (−3, −3)

3. Права која садржи тачке (1, 3) и (6, a) има коефицијент правца 2.

Одреди вредност за a.

4. Права која садржи тачке (2, 0) и (6, −6) има исти коефицијент правца као и права која садржи тачке (−1, 2) и (7, b).

Одреди вредност за b.

5. Нагиб праве AB је $\frac{4}{5}$.

Одреди коефицијент правца праве која је нормална на AB.

7.4 График линеарне функције

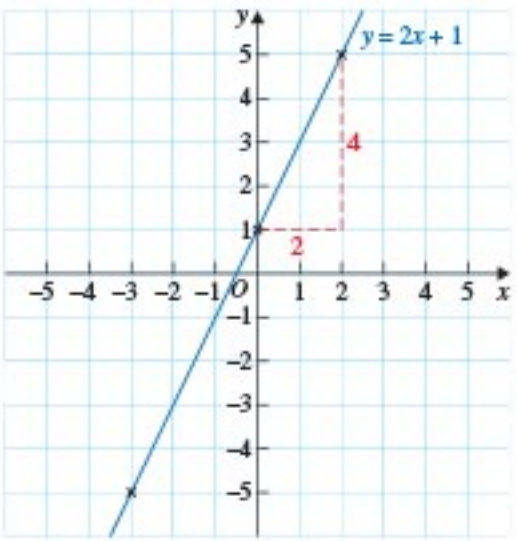
Линеарна функција типа $y = mx + c$

У VII и VIII разреду смо учили како се цртају графици линеарних функција типа $y = mx + c$.

На пример, да бисмо нацртали график за $y = 2x + 1$, прво састављамо табелу вредности, означавамо тачке у координатном систему и онда цртамо праву која их садржи.

x	−3	0	2
y	−5	1	5

Коефицијент правца на правој $y = 2x + 1$ можемо наћи са било које две тачке праве.



Ако узмемо тачке (0, 1) и (2, 5), добићемо:

$$\text{Коефицијент правца} = \frac{\text{вертикално растојање}}{\text{хоризонтално растојање}} = \frac{4}{2} = 2$$

Према томе, коефицијент правца праве $y = 2x + 1$ је 2.

Слично томе, можемо да покажемо да коефицијент правца праве $y = 3x - 5$ износи 3.

Одатле произилази опште правило:

График за $y = mx + c$ је права, где је m = коефицијент правца праве.

Пример 1

Одреди коефицијент правца правама:

а) $y = 6x - 1$ **б)** $y = 5 - 3x$ **в)** $x + 2y - 6 = 0$

а) $y = 6x - 1$ Коефицијент правца = 6

б) $y = 5 - 3x$ Једначину записујемо у облику $y = mx + c$

$y = -3x + 5$ Коефицијент правца = -3

в) $x + 2y - 6 = 0$ Једначину записујемо у облику $y = mx + c$

$2y = -x + 6$

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ Коефицијент правца = $-\frac{1}{2}$

Пример 2

Одреди једначину праве са коефицијентом правца 3 која садржи тачку (2, 5).

Коефицијент правца је 3, па $m = 3$ замењујемо у једначини $y = mx + c$.

$y = 3x + c$

Тачка (2, 5) припада правој, па ћемо у једначини заменити $x = 2$ и $y = 5$.

$5 = 3 \cdot 2 + c$

$c = -1$

Једначина праве је $y = 3x - 1$.

Задаци

1. Нацртај праве и одреди њихове коефицијенте правца.

а) $y = x + 4$ **б)** $y = 3x - 1$ **в)** $y = \frac{1}{2}x + 3$ **г)** $y = 5 - 2x$

2. Запиши коефицијенте правца датих правих.

а) $y = 2x + 5$ **б)** $y = 3x + 7$ **в)** $y = x + 4$ **г)** $y = \frac{1}{2}x + 7$

д) $y = -2x + 3$ **ђ)** $y = \frac{1}{2}x + 1$ **е)** $y = 2x$ **ж)** $y = 6$

3. Јован каже да је коефицијент правца праве $y = 3 - 2x$ једнак 3.

Објасни зашто је погрешио и одреди тачно решење.

4. Одреди коефицијент правца правих.

а) $y = 1 - 3x$ **б)** $y = 5 - x$ **в)** $y = 4 + 2x$ **г)** $y = 5 - \frac{1}{2}x$

5. Запиши сваку од једначина у облику $y = mx + c$, а затим одреди коефицијент правца сваке праве.

а) $y - 3x = 2$ **б)** $y - 2x + 1 = 0$ **в)** $4x + y = 3$ **г)** $5x + 2y = 10$

д) $3y - x = 9$ **ђ)** $2y = 4x + 8$ **е)** $2y = 6x\ 2\ 2$ **ж)** $3y\ 2\ 5x = 215$

6. Које су од следећих правих паралелне?

А $y = -2x + 2$ Б $4x + 2y = 6$ В $2y - 2x = 7$ Г $x = -\frac{1}{2}y + 5$

Паралелне праве имају једнак коефицијент правца.

7. Одреди једначину праве са коефицијентом правца -2 која садржи тачку $(1, 5)$.

8. Одреди једначину праве која садржи тачку $(5, 4)$ и $(9, -1)$.

Линеарна функција типа $ax + by = c$

Када треба да нацртамо график праве са једначином $3x + 4y = 12$, најлакше би било да је нацртамо ако нађемо тачке у којима права сече координатне осе.

Ако ставимо $x = 0$ у једначину, добићемо **пресечну тачку са y-осом.**

Ако је $x = 0$, тада је $4y = 12$, $y = 3$.

Према томе, график сече y-осу у 3.

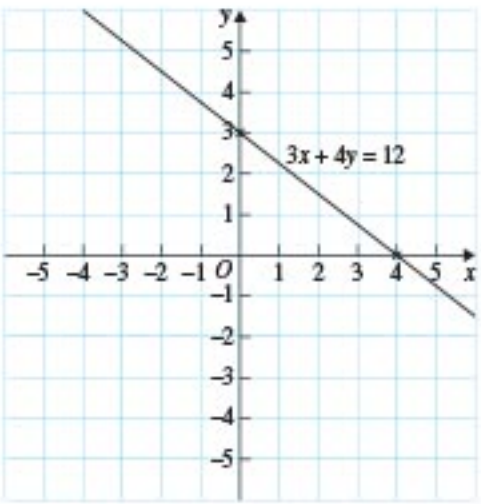
Ако ставимо $y = 0$ у једначину, добијамо **пресечну тачку са x-осом.**

Ако је $y = 0$, тада је $3x = 12$, $x = 4$.

Према томе, график сече x-осу у 4.

Табела вредности је:

x	0	4
y	3	0



Пример 3

Нацртај график за $3x - 7y = 21$.

Ако $x = 0$, онда $-7y = 21$, $y = -3$ — Налазимо пресечну тачку за y-осу.

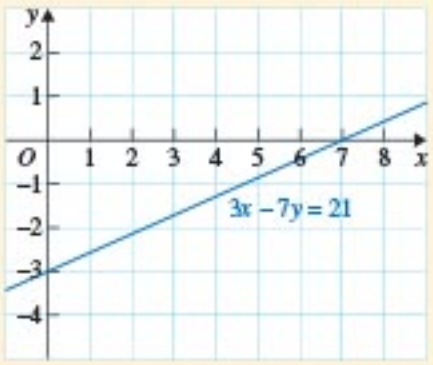
Према томе, график сече y-осу y –3.

Ако $y = 0$, онда $3x = 21$, $x = 7$ — Налазимо пресечну тачку за x-осу.

Према томе, график сече x-осу у 7.

Табела вредности је:

x	0	7
y	–3	0



Задаци

1. Одреди тачке у којима графици функција секу координатне осе, а затим нацртај праве.

   а) $x + y = 5$ **б)** $x + y = 2$ **в)** $x + y = -3$ **г)** $2x + y = 8$

   д) $x + 3y = 9$ **ђ)** $4x + 3y = 12$ **е)** $2x + 3y = 12$ **ж)** $3x + 8y = 24$

   з) $2x + 4y = -8$ **и)** $5x + 4y = -20$ **ј)** $6x + 7y = 21$ **к)** $2x + 7y = -21$

2. Одреди тачке у којима графици функција секу координатне осе, а затим нацртај праве.

   а) $x - y = 4$ **б)** $x - y = 2$ **в)** $2x - y = 4$ **г)** $x - 3y = 9$

   д) $3x - 4y = 24$ **ђ)** $5x - 2y = 10$ **е)** $2x - 5y = -10$ **ж)** $7x - 2y = 21$

7.5 Функције које произилазе из ситуација у реалном животу

Научници користе графике да би приказали трендове и тенденције између два или више параметра. Ако научници могу да нађу функцију која је одговарајућа тренду, тада је могуће предвидети како ће изгледати будућност.

Један пример о томе је препознавање ефеката утицаја климатских промена на подизање нивоа мора.



Правило за израчунавање времена t за припрему, у минутима, пилета масе m у килограмима гласи:

„припрема траје 45 минута за сваки килограм, а затим још додатних 20 минута".

Ово правило може да се запише формулом:

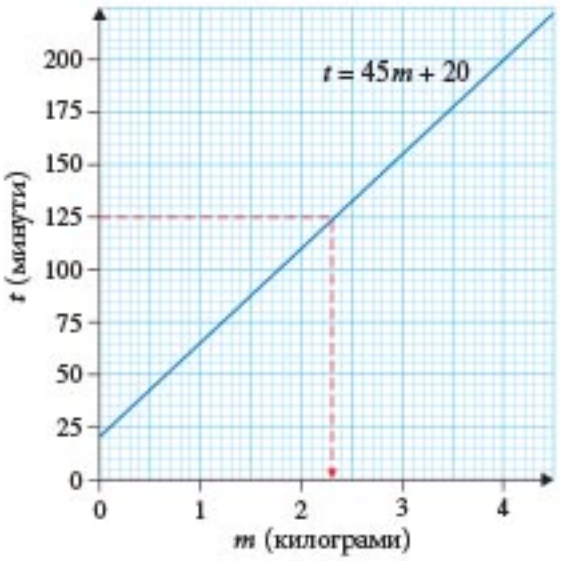
$t = 45m + 20$

Да бисмо приказали везу између m и t, састављамо табелу вредности и цртамо график.

m	1	2	3	4
t	65	110	155	200

Затим график користимо да бисмо читали потребне информације.

На пример, маса пилета за које је потребно 125 минута кувања је 2,3 kg (приказано црвеним правама на графику).



Пример

Петар је био у Охриду. Могао је да изнајми брод од компаније А или од компаније Б..

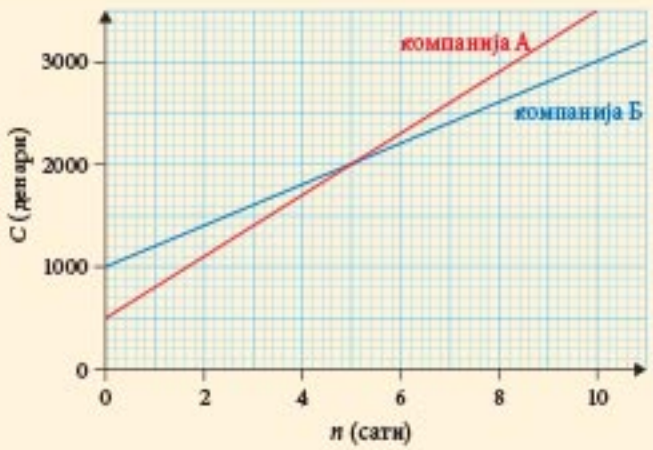
Цена (C) за изнајмљивање брода за n часова сваке компаније је приказана у табели.

Компанија А	$C = 500 + 300n$
Компанија Б	$C = 1000 + 200n$

Графички прикажи цену компанија и одреди вредности за n за које је компанија А скупља од компаније Б.

Компанија А				
n (часова)	1	2	3	4
C (денара)	800	1100	1400	1700

Компанија Б				
n (часова)	1	2	3	4
C (денара)	1200	1400	1600	1800



Са графика можемо да видимо да је компанија А скупља када $n > 5$.

Задаци

1. Али загрева једну посуду са водом.

Записивао је температуру на сваких 5 минута.

У табели су приказани његови резултати.

Време, m (минути)	5	10	15	20
Температура, t (°C)	10	13	16	19

а) Нацртај график праве да би приказао/приказала податке из табеле.

б) Колика је била температура воде када је почео да загрева воду?

в) Одреди коефицијент правца.

Који податак представља коефицијент правца?

г) Користи график да нађеш вредност m када је температура била 17°C.

2. Правило за претварање температуре C, дате у Целзијусовим степенима (°C), у температуру F, изражену у Фаренхајтовим степенима (°F) је:

„помножи са 1,8 и затим додај 32".

а) Запиши ово правило у облику „$F =$ ……"

б) Представи ово правило на графику за $-50 \leq C \leq 50$.

в) Користи график да би одредио температуру:

I у °F када је она 18 °C **II** у °C када је она 18°F

г) Користи график да одредиш температуру која има исту вредност у Целзијусовим и Фаренхајтовим степенима.

7.6 Директна пропорција

Ако је цена за 1 метар ластиша 6 денара, тада је цена (C) за n метара ластиша дата формулом: $C = 6n$.



У табели је приказано неколико могућих вредности за n и за C.

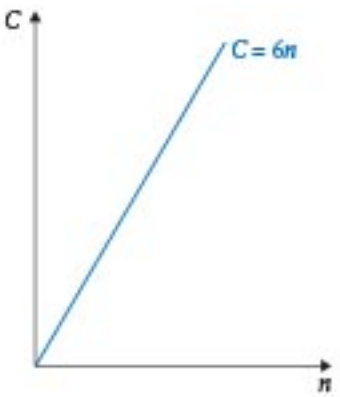
n (метри)	1	2	3	4	5	6
C (денари)	6	12	18	24	30	36

То значи да:

ако се n повећа двоструко, онда ће се и C повећати двоструко

ако се n повећа три пута, онда ће се и C повећати за три пута.

За количине n и C рећи ћемо да су директно пропорционалне, а график C у односу на n биће права која садржи координатни почетак.



Ако је y директно пропорционално x, онда је $y = kx$, где је k коефицијент пропорционалности.

Пример

y је директно пропорционално x.

Када је $y = 4$, тада је $x = 5$.

а) Одреди формулу која повезује y и x.

б) Одреди y, када је $x = 3$.

а) y је директно пропорционално x. Имамо

$y = kx$

$4 = 5k$ $y = 4$ и $x = 5$ замењујемо у једначини.

$k = \frac{4}{5}$ Обе стране делимо са 5.

Формула је $y = \frac{4}{5}x$

б) Када је $x = 3$, $y = \frac{4}{5} \cdot 3 = 2{,}4$ $x = 3$ замењујемо у формули под **а)**.

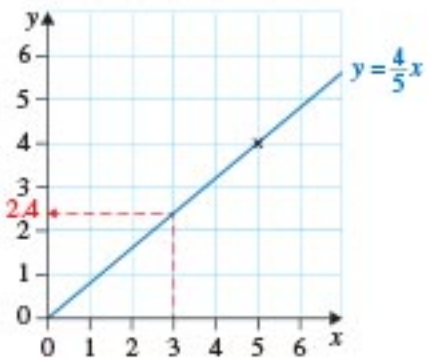
Пример можемо илустровати графиком.

Зато што је y директно пропорционално x, график ће бити права која садржи координатни почетак и тачку (5, 4).

Права има коефицијент правца $\frac{4}{5}$,

а једначина праве је $y = \frac{4}{5}x$

Испрекидана црвена линија показује да када је $x = 3$, тада је $y = 2{,}4$.



Задаци

1. y је директно пропорционално x.

$y = 18$ када је $x = 6$

а) Одреди формулу која повезује y и x.

б) Одреди вредност y када је $x = 12$.

2. y је директно пропорционално x.

$y = 15$ када је $x = 20$

а) Одреди формулу која повезује y и x.

б) Одреди вредност y када је $x = 34$.

3. p је директно пропорционално q.

$p = 0{,}5$ када је $q = 8$

а) Одреди формулу која повезује p и q.

б) Одреди вредност p када је $q = 20$.

в) Одреди вредност q када је $p = 0{,}2$.

4. Пређени пут d, у метрима, једног бициклисте директно је пропорционалан броју окретаја n, направљених точком бицикла.

Јован је прошао 21 m са 10 окретаја точка бицикла.

а) Одреди формулу која повезује d и n.

б) Одреди пређени пут када је $n = 27$.



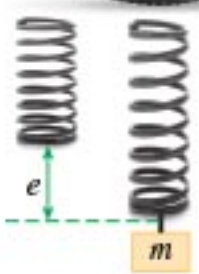
5. Истезање (e) опруге, у cm јесте директна пропорција масе m у kg, тела које качимо на један крај опруге.

Када је $e = 3$, $m = 5$

а) Одреди формулу која повезује e и m.

б) Одреди e када је $m = 6$.

в) Одреди m када је $e = 2{,}6$.



6. Време t, у секундама, потребно за једну осцилацију клатна, директно је пропорционално квадратном корену дужине клатна l, у метрима.

$t = 1{,}6$ када је $l = 0{,}64$

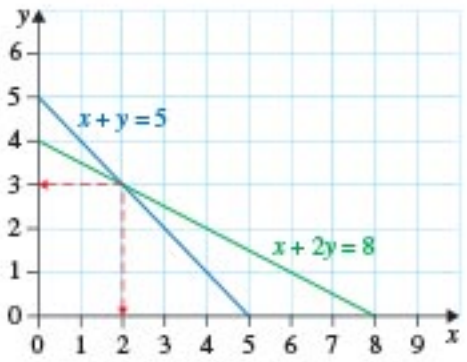
а) Одреди формулу која повезује t и l.

б) Одреди t, када је $l = 0{,}81$.



7.7 Графичко решавање система једначина

Једначине $x + y = 5$ и $x + 2y = 8$ можемо представити графички у координатном систему, као што је приказано на цртежу.



Праве се секу у тачки (2, 3).

Решење **система једначина**:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

једнак $x = 2$, $y = 3$

Провера: вредности x и y замењујемо у почетне једначине.

$2 + 3 = 5$ ✓ и $2 + (2 \cdot 3) = 8$ ✓

Систем једначина је формиран од две или више једначина за које тражимо заједничка решења. Једначине записујемо једну испод друге и означавамо их заградом {.

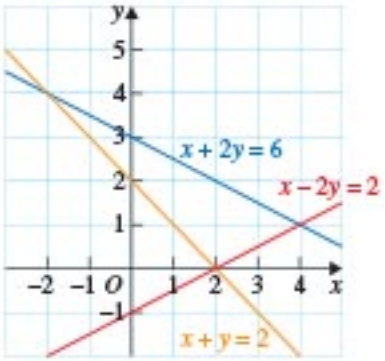
Задаци

1. Реши графички следеће системе једначина:

а) $\begin{cases} x+2y=6 \\ x-2y=2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=6 \end{cases}$



2. Реши графички систем једначина:

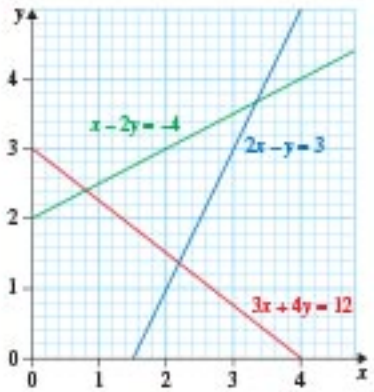
$$\begin{cases} 5x+2y=25 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$$

3. Реши графички следеће системе једначина:

а) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x+4y=12 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 2x-y=3 \end{cases}$



Решења заокругли на једно децимално место.

4. Реши графички систем једначина:

$$\begin{cases} 3x+7y=21 \\ 2x-3y=-3 \end{cases}$$

Решења заокругли на једно децимално место.

7.8 Решавање система једначина методом елиминације

Једначина $2x + y = 6$ има две променљиве x и y.

Постоје многи парови вредности x и y за које је тачна једначина $2x + y = 6$.

Такви су, на пример: $x = 1, y = 4$ $x = 2, y = 2$ $x = 4, y = -2$

Једначина $4x + y = 8$ такође има две променљиве x и y.

Опет, постоји много парова вредности x и y, који задовољавају једначину $4x + y = 8$.

Нека од могућих решења су: $x = 0, y = 8$ $x = 1, y = 4$ $x = 2, y = 0$

Када решавамо **систем једначина**, потребно је да одредимо пар вредности за x и y при чему обе једначине у систему прелазе у тачне једнакости.

Решење система једначина:

$$\begin{cases} 4x + y = 8 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

е $x = 1$, $y = 4$ зато што су за овај пар вредности тачне обе једначине.

Бржи начин решавања система једначина је да користимо алгебарски систем једначина:

$$\begin{cases} 4x + y = 8 & [1] \\ 2x + y = 6 & [2] \end{cases}$$

Овај метод којим елиминишемо једну променљиву називамо методом елиминације.

Разлика Једначина [1] − Једначина [2] елиминисаће чланове са y.

$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Да бисмо одредили вредност y, замењујемо $x = 1$ у једначини [1].

$$4 + y = 8$$
$$y = 4$$

Решење система је $x = 1$, $y = 4$.

Изврши проверу решења заменом вредности за x и y у почетним једначинама.

Пример 1

Реши систем једначина: $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 & [1] \\ x + 2y = -1 & [2] \end{cases}$$

Разлика Једначина [1] − Једначина [2] елиминисаће чланове са y.

$$4x = 12$$
$$x = 3$$

Да бисмо одредили вредност y, замењујемо $x = 3$ у једначини [1].

$$15 + 2y = 11$$
$$2y = -4$$
$$y = -2$$

Решење система је $x = 3$. $y = -2$.

Провера: $(5 \cdot 3) + (2 \cdot (-2)) = 15 + (-4) = 11$ ✓ и $3 + (2 \cdot (-2)) = 3 + (-4) = -1$ ✓

Пример 2

Реши систем једначина: $\begin{cases} 4x + 3y = 29 \\ 2x - 3y = -17 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 29 & [1] \\ 2x - 3y = -17 & [2] \end{cases}$$

Збир Једначина [1] + Једначина [2] ће елиминисати чланове са y.

$$6x = 12$$
$$x = 2$$

Да бисмо одредили вредност y, замењујемо $x = 2$ у једначини [1].

$$8 + 3y = 29$$
$$3y = 21$$
$$y = 7$$

Решење система је $x = 2$, $y = 7$.

Провера: $(4 \cdot 2) + (3 \cdot 7) = 8 + 21 = 29$ ✓ и $(2 \cdot 2) - (3 \cdot 7) = 4 - 21 = -17$ ✓

Задачи

1. Реши системе једначина:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x + y = 17 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x + 5y = 26 \\ 3x + 5y = 14 \end{cases}$ **ђ)** $\begin{cases} x + 7y = 18 \\ x + 4y = 12 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x + 4y = 14 \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

з) $\begin{cases} 4x + 3y = 31 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ **и)** $\begin{cases} x - 4y = 12 \\ x - 7y = 6 \end{cases}$ **ј)** $\begin{cases} 7x + 3y = -5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ **к)** $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ x - 5y = 19 \end{cases}$

2. Реши системе једначина:

а) $\begin{cases} 3x + y = 19 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 2x - 3y = -10 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 5x - 3y = -21 \\ 3x + 3y = -3 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases}$ **ђ)** $\begin{cases} 6x - y = -16 \\ 5x + y = -6 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 7x - 3y = 59 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 8x - 5y = -14 \\ 2x + 5y = -16 \end{cases}$

3. Реши системе једначина:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 6x + y = -8 \\ 4x + y = -4 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 5x - 7y = -26 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 3x - 5y = -11 \\ 4x + 5y = -3 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x - 4y = -3 \\ 3x - 4y = -13 \end{cases}$ **ђ)** $\begin{cases} 4x - y = 14 \\ 6x + y = 16 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 4x - 5y = 37 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x + 7y = 16 \\ 2x - 3y = -24 \end{cases}$ **и)** $\begin{cases} 4x - 3y = 21 \\ 3x - 3y = 18 \end{cases}$ **ј)** $\begin{cases} 4x - 7y = -58 \\ 3x + 7y = 30 \end{cases}$ **к)** $\begin{cases} 7x - 3y = -4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

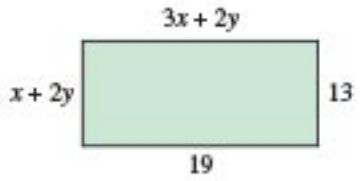
4. Збир два броја је 22, а њихова разлика је 9.

Означимо бројеве са x и y.

а) Запиши једначине са x и y.

б) Реши систем једначина.

5. На цртежу је дат правоугаоник. Израчунај вредности за x и y, *према подацима на цртежу.*



6. Аритметичка средина два броја је 44, њихова разлика је 17.

Који су то бројеви?

Целиот текст од Када хоћемо, до крај одузимамо једначине, смени вака:
Постоје системи једначина у којима су коефицијенти уз променљиве различити. У таквим случајевима потребно је да једну или другу једначину помножимо одговарајућим бројем. То чинимо тако што одређујемо НЗС за бројеве који стоје уз одговарајућу променљиву (x или y). Затим множимо једначине и на крају их сабирамо или одузимамо.

Пример 3

Реши систем једначина: $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - 4y = 28 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y = 6 & [1] \\ 3x - 4y = 28 & [2] \end{cases}$$

Да бисмо направили исте коефицијенте испред x, једначину [1] множимо са 3.

$$\begin{cases} 3x + 6y = 18 \\ 3x - 4y = 28 \end{cases}$$

Одузимање једначина елиминисаће чланове са x.

$10y = -10$ Знамо да је $+6 - (-4) = 6 + 4$

$y = -1$

Да бисмо одредили вредност за x, треба да заменимо $y = -1$ у једначини [1].

$x - 2 = 6$

$x = 8$

Решење система је $x = 8$, $y = -1$.

Провера: $8 + (2 \cdot (-1)) = 8 + (-2) = 6$ ✓ и $(3 \cdot 8) - (4 \cdot (-1)) = 24 - (-4) = 28$ ✓

Пример 4

Реши систем једначина: $\begin{cases} 5x + 3y = 26 \\ 8x + 5y = 43 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x + 3y = 26 & [1] \\ 8x + 5y = 43 & [2] \end{cases}$$

Да бисмо елиминисали променљиву y, налазимо НЗС $(3,5) = 15$, па ћемо тако једначину [1] помножити са 5, а једначину [2] са 3.

$$\begin{cases} 25x + 15y = 130 \\ 24x + 15y = 129 \end{cases}$$

Одузимање једначина ће елиминисати чланове са y.

$$x = 1$$

Да бисмо нашли вредност y, замењујемо $x = 1$ у једначини [1].

$$5 + 3y = 26$$
$$3y = 21$$
$$y = 7$$

Решење је $x = 1, y = 7$.

Провера: $(5 \cdot 1) + (3 \cdot 7) = 5 + 21 = 26$ ✓ и $(8 \cdot 1) + (5 \cdot 7) = 8 + 35 = 43$ ✓

Задаци

1. Реши системе једначина.

а) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x + 3y = 30 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 8x - 3y = 26 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 5x + 3y = 43 \\ 4x + 6y = 38 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 3x + 2y = 27 \\ 4x - y = 25 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ x - 3y = -13 \end{cases}$ **ђ)** $\begin{cases} 4x + y = 11 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 4x - 5y = 31 \\ x - 3y = 13 \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 5x - y = -16 \\ 7x + 4y = 10 \end{cases}$

з) $\begin{cases} 7x + 2y = 13 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$ **и)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 4y = 23 \end{cases}$ **ј)** $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x + 5y = -1 \end{cases}$ **к)** $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 5y = -8 \end{cases}$

2. Реши системе једначина.

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 5x + 2y = 38 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x + 2y = 19 \\ 2x - 3y = -22 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 5x + 3y = 32 \\ 2x + 4y = 24 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 4x + 3y = -2 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x - 2y = 24 \\ 5x - 7y = 51 \end{cases}$ **ђ)** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = 27 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 9x - 4y = -17 \end{cases}$

з) $\begin{cases} 5x - 7y = 38 \\ 3x - 4y = 23 \end{cases}$ **и)** $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 5x + 3y = 17 \end{cases}$ **ј)** $\begin{cases} 5x - 2y = 33 \\ 3x + 7y = -13 \end{cases}$ **к)** $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = 41 \end{cases}$

3. Ако један број помножимо са 3 и затим саберемо са другим бројем помноженим са 5, добијамо резултат 2.

Збир бројева је 2.

Одреди бројеве.

4. Седам конзерви сока од јабука и пет конзерви лимунаде коштају 170 денара. Четири конзерве сока од јабука и три конзерве лимунаде коштају 99 денара. Одреди цену једне лименке сока од јабуке.

5. Карте за позориште коштају 275 денара за одрасле и 160 денара за децу. Једне вечери у позоришту је продато 342 карте по цени од 75995 денара. Колико карата за децу је продало позориште?

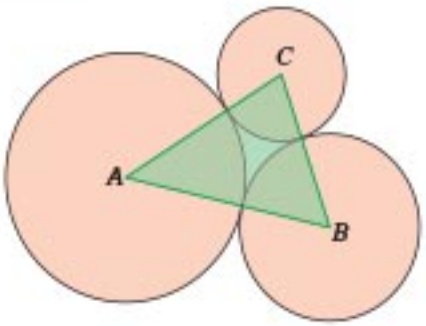
6. Реши системе једначина.

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ y - 2x = 3 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y = x + 3 \\ 3y + x = 5 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3y - 5x = 21 \\ 3x + y + 7 = 0 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 9 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = -2 \end{cases}$

7. Одреди x и y тако да дати изрази имати исту вредност.

$2x + y + 5$ $5x - 2y + 17$ $4x + 3y - 63$

8. A, B и C су центри три кружнице.
$\overline{AB} = 11$, $\overline{AC} = 10$ и $\overline{BC} = 8$
Израчунај полупречнике све три кружнице.



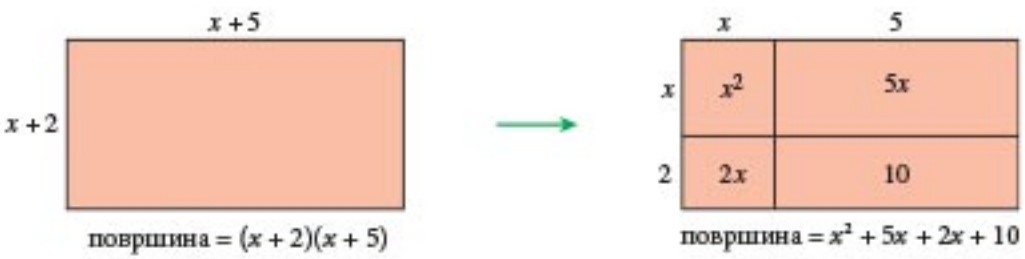
9. Реши систем једначина.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + 2y + 2z = 13 \end{cases}$$

7.9 Множење два алгебарска израза

Запис $(x + 2)(x + 5)$ значи $(x + 2) \cdot (x + 5)$. Да бисмо помножили изразе, морамо да се ослободимо заграда у изразима.

Површину правоугаоника чије су дужине страница $x + 2$ и $x + 5$ можемо израчунати поделом правоугаоника на четири дела као што је приказано на цртежу.



Према томе, имамо $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10$

$$= x^2 + 7x + 10$$

Сада ћемо се ослободити заграда $(x + 2)(x + 5)$ без коришћења цртежа.

Треба да пратимо следеће кораке:

Корак 1:

Множимо сваког члана из друге заграде са x из прве заграде.

$(x+2)(x+5)$ $\quad x \cdot x = x^2$ и $x \cdot 5 = 5x$

Корак 2:

Множимо сваког члана из друге заграде са (+2) из прве заграде.

$(x+2)(x+5)$ $\quad 2 \cdot x = 2x$ и $2 \cdot 5 = 10$

Корак 3:

Комбинујемо резултате претходна два корака.

Добијамо $(x+2)(x+5)$ $= x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x^2 + 7x + 10$

Пример 1

Користи цртеж да се ослободиш заграда у изразу: $(x+6)(x+11)$

	x	11
x	x^2	$11x$
6	$6x$	66

$(x+6)(x+11) = x^2 + 11x + 6x + 66$

$= x^2 + 17x + 66$

Пример 2

Помножи изразе, а затим упрости добијени израз:

а) $(x+3)(x+4)$ **б)** $(x-7)(x+2)$ **в)** $(x-6)(x-7)$

а) $(x+3)(x+4)$ $\quad x \cdot x = x^2$ $\quad x \cdot (+4) = +4x$ $\quad 3 \cdot (+x) = 3x$ $\quad +3 \cdot (+4) = +12$

$= x^2 + 4x + 3x + 12$

$= x^2 + 7x + 12$

б) $(x-7)(x+2)$ $\quad x \cdot x = x^2$ $\quad x \cdot (+2) = +2x$ $\quad -7 \cdot (+x) = -7x$ $\quad -7 \cdot (+2) = -14$

$= x^2 + 2x - 7x - 14$

$= x^2 - 5x - 14$

в) $(x-6)(x-7)$ $\quad x \cdot x = x^2$ $\quad x \cdot (-7) = -7x$ $\quad -6 \cdot x = -6x$ $\quad -6 \cdot (-7) = +42$

$= x^2 - 7x - 6x + 42$ Множење два негативна броја: $-6 \cdot (-7) = +42$

$= x^2 - 13x + 42$

Задаци

1. Помоћу цртежа, помножи изразе:

а) $(x+1)(x+3)$ **б)** $(x+8)(x+2)$ **в)** $(x+5)(x+5)$ **г)** $(x+6)(x+4)$

д) $(x+8)(x+1)$ **ђ)** $(x+7)(x+9)$ **е)** $(x+4)(x+8)$ **ж)** $(x+2)(x+10)$

2. Ослободи се заграда без коришћења цртежа.

а) $(x+2)(x+4)$ **б)** $(x+5)(x+1)$ **в)** $(x+4)(x+4)$ **г)** $(x+7)(x+3)$

д) $(x+9)(x+8)$ **ђ)** $(x+6)(x+2)$ **е)** $(x+7)(x+8)$ **ж)** $(x+11)(x+4)$

3. Ослободи се заграда и упрости:

а) $(x+3)^2$ **б)** $(x+1)^2$ **в)** $(x+7)^2$

г) $(x+2)^2$ **д)** $(x+9)^2$ **ђ)** $(x+5)^2$

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3)$

4. Поправи грешке које је направила Ања када се ослобађала заграда у домаћем задатку.

а) $(x+3)(x-6) = x^2 - 6x + 3x - 3 = x^2 - 3x - 3$

б) $(x-4)(x-5) = x^2 - 5x - 4x - 20 = x^2 - 9x - 20$

в) $(x-6)^2 = x^2 + 36$

У задацима **5, 6, 7** и **8** ослободи се заграда и упрости.

5. **а)** $(x-3)(x+4)$ **б)** $(x+5)(x-7)$ **в)** $(x-6)(x+8)$ **г)** $(x+2)(x-9)$

д) $(x+3)(x-7)$ **ђ)** $(x-6)(x+7)$ **е)** $(x+9)(x-1)$ **ж)** $(x+4)(x-5)$

з) $(x+4)(x-2)$ **и)** $(x-9)(x+8)$ **ј)** $(x+10)(x-2)$ **к)** $(x+5)(x-7)$

6. **а)** $(x-3)(x+3)$ **б)** $(x+5)(x-5)$ **в)** $(x-6)(x+6)$ **г)** $(x+2)(x-2)$

д) $(x+4)(x-4)$ **ђ)** $(x-1)(x+1)$ **е)** $(x+15)(x-15)$ **ж)** $(x+9)(x-9)$

7. **а)** $(x-5)(x-4)$ **б)** $(x-8)(x-7)$ **в)** $(x-6)(x-8)$ **г)** $(x-2)(x-3)$

д) $(x-3)(x-7)$ **ђ)** $(x-6)(x-9)$ **е)** $(x-11)(x-2)$ **ж)** $(x-8)(x-10)$

8. **а)** $(x-1)^2$ **б)** $(x-7)^2$ **в)** $(x-4)^2$ **г)** $(x-13)^2$

9.

A $x-3$	B $x+1$	C $x+3$	D $x+2$	E $x-1$

Које две картице су помножене да би се добили следећи изрази.

а) $x^2 - x - 6$ **б)** $x^2 + 4x + 3$ **в)** $x^2 + x - 2$

г) $x^2 - 1$ **д)** $x^2 - 2x - 3$ **ђ)** $x^2 + 5x + 6$

е) $x^2 + 2x - 3$ **ж)** $x^2 + 3x + 2$ **з)** $x^2 - 9$

10. Ослободи се заграда и упрости:

а) $(x+4)(x+5) + (x+3)(x+9)$ **б)** $(x+7)(x+1) + (x+2)(x+5)$

в) $x(x+2) + (x+8)(x+1)$ **г)** $(x+9)(x+2) - (x+4)(x+6)$

д) $(x+4)^2 + (x+3)^2$ **ђ)** $(x+8)^2 - (x-3)^2$

11. Реши једначине:

а) $x(x+8)=(x+3)(x+4)$ **б)** $(x+4)(x+2)=(x+3)(x+1)$

в) $(x+2)^2=(x-3)^2$ **г)** $(x+4)(x+2)=(x-3)(x-4)$

12. Покажи да је $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=3n^2+6n+5$

13. Ослободи се заграда и упрости:

а) $(2x+3)(x+5)$ **б)** $(3x+1)(x-7)$ **в)** $(x-6)(2x+4)$ **г)** $(5x+3)(x-2)$

д) $(2x+1)(3x-5)$ **ђ)** $(4x-3)(2x+1)$ **е)** $(8x+5)(3x-4)$ **ж)** $(5x-4)(x-5)$

з) $(3x-4)(x-2)$ **и)** $(7x-1)(3x-2)$ **ј)** $(5x+7)^2$ **к)** $(4x-3)^2$

14. Напиши у облику једног разломка:

а) $\frac{2}{x}+\frac{5}{x+7}$ **б)** $\frac{2}{x+3}+\frac{5}{x+1}$ **в)** $\frac{4}{x-2}+\frac{3}{x+5}$ **г)** $\frac{5}{x-3}-\frac{2}{x+4}$

7.10 Покушаји и грешке

Неке једначине су претешке да бисмо их решили помоћу еквивалентних трансформација.

Овакве једначине, за сада, решавамо методом названом **метода покушаја и грешака.**

Овом методом вршимо процену решавања и затим покушавамо да побољшамо процену.

Пример 1

Методом покушаја и грешака реши једначину $x^3-3x=322$

Први покушај: $x=5$: $5^3-3\cdot 5=125-15=110$ ➔ премало

Други покушај: $x=6$: $6^3-3\cdot 6=216-18=198$ ➔ премало

Трећи покушај: $x=7$: $7^3-3\cdot 7=343-21=322$ ➔ тачно

Решење је $x=7$

У задњем примеру смо пронашли тачно решење једначине.

Понекад није могуће да пронађемо тачно решење, па морамо да потражимо приближно решење.

Цели поступак приказујемо табелом.

Пример 2

Површина датог правоугаоника је $72\,\text{cm}^2$.

Методом покушаја и грешака нађи вредност x заокругљену на 1 децимално место.



Површина правоугаоника = основа · одговарајућа висина.

Према томе, $x(x+5)=72 \Rightarrow x^2+5x=72$

Процена	x^2+5x	Коментар	
6	$6^2+5\cdot 6=66$	премало	
7	$7^2+5\cdot 7=84$	превелико	x је између 6 и 7
6,3	$6{,}3^2+5\cdot 6{,}3=71{,}19$	премало	
6,4	$6{,}4^2+5\cdot 6{,}4=72{,}96$	превелико	x је између 6,3 и 6,4.
6,35	$6{,}35^2+5\cdot 6{,}35=72{,}0725$	превелико	

Решење је између $x = 6{,}3$ и $x = 6{,}35$

Према томе, решење је $x = 6{,}3$ заокругљено на 1 д.м.

Последњи покушај са $x = 6{,}35$ потребан је да бисмо проверили да ли је решење ближе 6,3 него 6,4. Увек морамо да користимо број са једним децималним местом више, него што се тражи у задатку.

Задаци

У решавању следећих задатака користи метод покушаја и грешака.

1. Симон користи метод покушаја и грешака да би решио једначину $x^3 - 5x = 56$

У табели су приказане његове прве две процене.

Процена	x^3-5x	Коментар
4	$4^3-5\cdot 4=44$	премало
5	$5^3-5\cdot 5=100$	превелико

Продужи са попуњавањем табеле да добијеш приближно решење.

Решење заокругли на једно децимално место.

2. У овом задатку треба да пронађеш решење једначине која се налази у датом интервалу.

Решења заокругли на једно децимално место.

а) $x^2+5x=60$ ако се x налази између 5 и 6.

б) $x^2-2x=58$ ако се x налази између 8 и 9.

в) $x+\frac{10}{x}=8$ ако се x налази између 6 и 7.

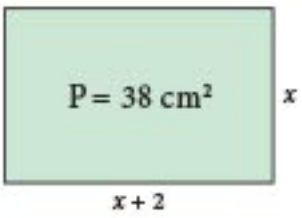
3. Израчунај решења једначина заокругљена на једно децимално место.

а) $x^3+x=4$ **б)** $x^3-2x=10$ **в)** $2x^3-7x=9$ **г)** $2x=20$

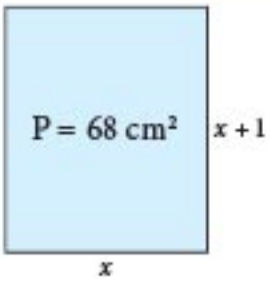
4. Запиши једначину за x за израчунавање површине за дате правоугаонике.

Реши једначине и одреди вредност за x заокругљену на једно децимално место.

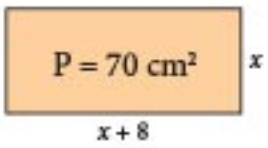
а)



б)



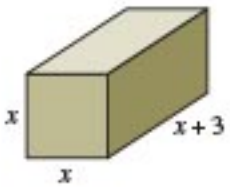
в)



5. Квадрат на цртежу има запремину 250 cm³.

а) Покажи да је $x^3 + 3x^2 = 250$

б) Израчунај вредност за x заокругљену на једно децимално место.

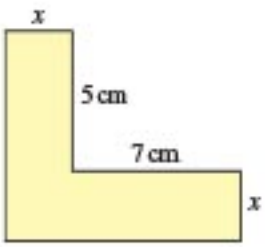


6. Површина 2Д-форме на цртежу је 40 cm².

а) Покажи да је $x^2 + 12x = 40$

б) Израчунај вредност за x заокругљену на једно децимално место.

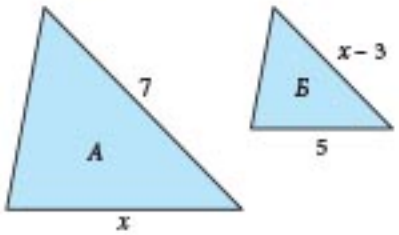
Подели 2Д-форму на два правоугаоника



7. Троугао А је повећавање троугла Б.

а) Запиши једначину за x и покажи да она може да се упрости до $x^2 - 3x = 35$.

б) Израчунај вредност x заокругљену на једно децимално место.

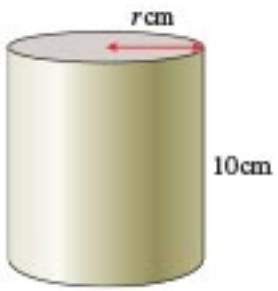


8. Површина P ваљка полупречника r и висине h једнак $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Дати ваљак има површину 300 cm².

а) Покажи да је $\pi r^2 + 10\pi r = 150$

б) Израчунај вредност r заокругљену на једно децимално место.



7.11 Неједначине

Представљање неједначина на бројевној оси

Постоји четири знака за неједнакост које треба да знамо.

$a > 2$ значи „a је веће од 2" или „2 је мање од a"

$b \geq 5$ значи „b је веће или једнако са 5" или „5 је мање или једнако са b"

$c < 3$ значи „c је мање од 3" или „3 је веће од c"

$d \leq 4$ значи „d је мање или једнако са 4" или „4 је веће или једнако са d"

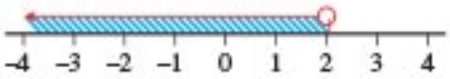
Неједначине се често примењују у свакодневном животу.

Саобраћајни знак за ограничавање брзине означава да максимална брзина v km/h возила мора бити највише 100 km/h. То можемо да запишемо на следећи начин: $v \leq 100$.



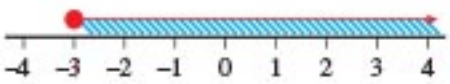
Неједначине често представљамо на бројевној оси.

$x < 2$ значи да је x мање од 2. На бројевној оси можемо да прикажемо на следећи начин:



За < или > користимо празан кружић.

$x \geq -3$ значи „x“ је веће или једнако са „-3“ и то можемо да прикажемо на следећи начин:



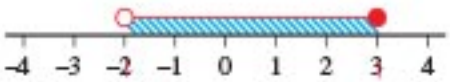
За ≤ или ≥ користимо обојени кружић.

$-2 < x \leq 3$ значи да је x веће од -2 и исто тако мање или једнако са 3.

Лакши начин је да кажемо:

x се налази -2 и 3. Он не може да буде једнак са -2, али може да буде једнак са 3.

$-2 < x \leq 3$ можемо да прикажемо на следећи начин:



Пример 1

Запиши неједначине приказане на бројевној оси:

а) 

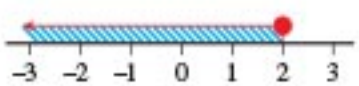
б) 

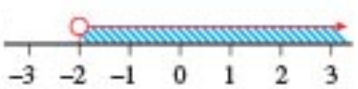
в) 

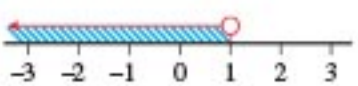
а) $x \leq 1$ **б)** $x > -3$ **в)** $-3 \leq x < 2$

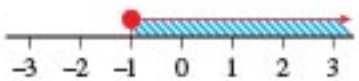
Задаци

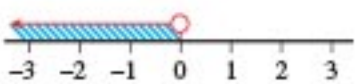
1. Запиши неједначине приказане на бројевној оси.

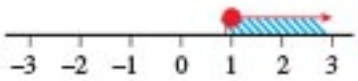
а) 

б) 

в) 

г) 

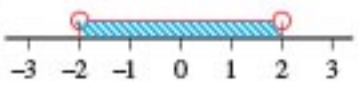
д) 

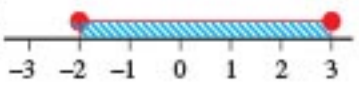
ђ) 

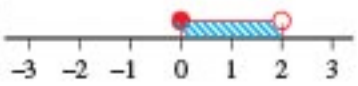
2. Прикажи неједначине на бројевној оси.

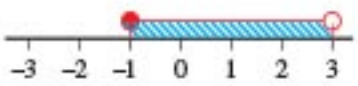
а) $x > 2$ **б)** $x < 4$ **в)** $x \geq -5$ **г)** $x \leq 1$

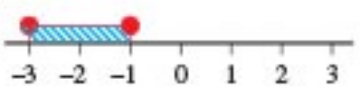
3. Запиши неједначине приказане на бројевној оси.

а)


б)


в)


г)


д)


ђ)


4. Прикажи неједначине на бројевној оси.

а) $1 \leq x < 4$ **б)** $-3 < x < 5$ **в)** $-4 < x \leq 2$ **г)** $3 \leq x \leq 5$

5. Нека је x цео број и $-2 \leq x < 4$

Набројиј могуће вредности за x.

Цели бројеви су природни бројеви, њихови супротни бројеви и нула.

6. **а)** Запиши најмањи могући цео број за који важи: $-5 < x \leq 3$

б) Запиши највећи могући цео број за који важи: $-5 < x \leq 3$

Решавање линеарних неједначина

Решење једначине $x + 1 = 5$ можемо да прикажемо на следећем цртежу:



Према томе, решење је $x = 4$.

Постоји само једна вредност за x за коју је тачна једначина. То је број 4.

Неједначину $x + 1 > 5$ можемо да прикажемо на следећем цртежу:



(Лева страна ваге је тежа од десне стране ваге.)

Према томе, решење је $x > 4$.

Постоје многе вредности за x за које је неједначина тачна.

x може да буде било који број већи од 4.

Начин решавања неједначина је врло сличан начину решавања једначина.

Када решавамо неједначине:

- можемо да додајемо исте вредности на обе стране;
- можемо да одузимамо исте вредности на обе стране;

- можемо да множимо или делимо обе стране са истим **позитивним** бројем;
- када неједначину множимо или делимо **негативним** бројем, онда морамо да **заменимо и знак за неједнакост**.

Последње правило ћемо приказати у следећем примеру:

Да размотримо неједнакост: $-2 < 5$

Ако помножимо обе стране са (-3), добићемо: $6 > -15$

Знак < заменили смо у >.

Пример 2

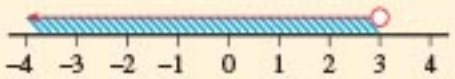
Реши неједначину $2(3x - 4) < 10$ и њено решење представи на бројевној оси.

$2(3x - 4) < 10$ Ослобађамо се заграда.

$6x - 8 < 10$ Додајемо 8 на обе стране.

$6x < 18$ Обе стране делимо са 6.

$x < 3$



Пример 3

Реши неједначину $9 - 3x \leq 3$

Први начин

$9 - 3x \leq 3$ Одузимамо 9 са обе стране.

$-3x \leq -6$ Обе стране делимо са -3.

$x \geq 2$ Мењамо знак неједнакости.

Други начин

$9 - 3x \leq 3$ Додајемо $3x$ на обе стране.

$9 \leq 3 + 3x$ Одузимамо 3 на обе стране.

$6 \leq 3x$ Обе стране делимо са 2.

$2 \leq x$

Добијамо $x \geq 2$

Задаци

1. Реши следеће неједначине.

а) $x + 7 \leq 11$ **б)** $x - 2 > 3$ **в)** $x + 10 < 4$ **г)** $x - 5 > 4$

д) $x + 3 \geq -2$ **ђ)** $2x > 8$ **е)** $3x \geq 21$ **ж)** $6x \leq 60$

з) $5x > -20$ **и)** $\frac{x}{3} < 5$ **ј)** $\frac{x}{2} \geq -8$ **к)** $\frac{x}{7} < 15$

л) $2x+1<9$ **љ)** $4x+3\geq 15$ **м)** $3x-2>1$ **н)** $5x+2\leq 12$

њ) $2x+3>8$ **о)** $5x-2<3$ **п)** $4x+1\geq 7$ **р)** $2x+9>6$

2. Реши следеће неједначине.

а) $7x+2>3x+22$ **б)** $6x-3\leq 5x+4$ **в)** $12x+5<8x+13$ **г)** $3x-5\leq 2x+8$

д) $4x-5\geq 2x+7$ **ђ)** $3x+8>x-2$ **е)** $6x+7<3x-5$ **ж)** $9x+10<7x-3$

з) $3x+2\leq 12-2x$ **и)** $2x+5>10-3x$ **ј)** $3-5x\leq 6-7x$ **к)** $6-2x>10-7x$

3. Реши следеће неједначине.

а) $-2x\geq 6$ **б)** $-3x<15$ **в)** $-6x>-24$ **г)** $-4x\leq 6$

д) $10-2x>4$ **ђ)** $15-4x\leq 3$ **е)** $14-3x<8$ **ж)** $2-5x\geq 7$

з) $6-x\geq 10$ **и)** $7-2x>3$ **ј)** $60-6x\leq 12$ **к)** $16\geq 8-4x$

4. Реши следеће неједначине.

а) $x+7>3x+1$ **б)** $2x+14\leq 6x-2$ **в)** $6-9x<14-7x$

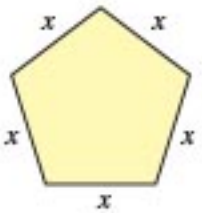
г) $36-27x>15-20x$ **д)** $40-16x\geq 14+2x$ **ђ)** $24-9x\leq 12-6x$

е) $7-5x>5-2x$ **ж)** $7-12x\geq 25-3x$ **з)** $1-x\leq 5x+7$

и) $6-3x\leq 13+x$ **ј)** $3-9x<2(3x-5)$ **к)** $5-2(x+3)>8+x$

5. Обим правилног петоугла је мањи од 42 cm.

Запиши неједначину којом ће се израчунати x и реши је.



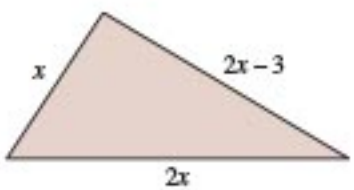
6. Обим правоугаоника је већи од 36 cm.

Запиши неједначину којом ће се израчунати x према подацима на цртежу.



7. Обим троугла не сме бити већи од 45 cm.

Израчунај максималну вредност коју може имати x.



8. **а)** Запиши најмањи цео број за који је тачна неједначина $3x>14$

б) Запиши најмањи цео број за који је тачна неједначина $2x-5>16$

в) Запиши највећи цео број за који је тачна неједначина $4x-15<6$

9. Реши неједначину $4<2x\leq 10$ и прикажи решење на бројевној оси.

10. Реши следеће неједначине, а затим наброј њихова целобројна решења.

а) $6\leq 2x\leq 8$ **б)** $-8<2x<6$ **в)** $3\leq 3x\leq 18$ **г)** $2<\frac{x}{2}\leq 4$

д) $3<x+2<7$ **ђ)** $2\leq x-4<5$ **е)** $-3\leq 2x+1\leq 7$ **ж)** $-5<3x-2\leq 7$

11. Реши неједначине.

а) $x+1\leq \frac{x-1}{4}$ **б)** $\frac{x-2}{2}>\frac{x+3}{7}$ **в)** $\frac{x-5}{3}\leq \frac{5-x}{2}$ **г)** $\frac{2x-3}{4}\geq \frac{3x-2}{5}$

12. Дате су неједначине: $x + 3 \geq 7$ $\quad 2x - 3 < 20$

а) Реши дате неједначине.

б) Одреди интервал вредности за x, за који су обе неједначине тачне.

13. Дата је неједначина $4x + 5y \leq 20$, тако што су x и y позитивни цели бројеви (без нуле). Одреди све могуће парове вредности за x и y за које је тачна неједначина.

Задаци за понављање

1. $y = \frac{3x^2 - 8}{x - 2}$

Израчунај вредност y када је:

а) $x = 3$ **б)** $x = -2$

2. Формула $s = \frac{1}{2}(u + v)t$ се користи у физици.

а) Израчунај вредност s, ако је $u = 5$, $v = 7$ и $t = 4$.

б) Израчунај вредност s, ако је $u = -4$, $v = 9$ и $t = 6$.

в) Израчунај вредност t, ако је $s = 60$, $u = 13$ и $v = -3$.

г) Одреди вредност за v, ако је $s = 45$, $u = -2$ и $t = 15$.

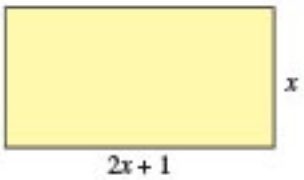
3. Један комад манга кошта x денара, а један комад ананаса кошта $(x + 1)$ денара.

Запиши формулу за укупну цену T у денарима која треба да се плати за 5 ананаса и 10 манга.

4. Запиши формулу за:

а) површину P правоугаоника према подацима на цртежу.

б) обим L правоугаоника према подацима на цртежу.



5. Изрази x у следећим формулама.

а) $y = x - 8$ **б)** $y - a = 3x$ **в)** $a(2x - 5) = c$ **г)** $a - cx = b$

д) $h(f - 2x) = 3g^2$ **ђ)** $\frac{x}{5p} = q$ **е)** $\frac{x}{2a + 3b} = 4c$ **ж)** $\frac{x + m}{n} = 5p$

з) $\frac{10}{x} = y$ **и)** $\frac{3x}{a} = \frac{4b}{c}$ **ј)** $\frac{y}{x - 5} = 2$ **к)** $2y = 5 - \frac{1}{x}$

л) $y = \frac{1}{5}x - 4$ **љ)** $2 - x^2 = y$ **м)** $\frac{x^2}{3} - 1 = y$ **н)** $\sqrt{x - 4} = 2y$

6. Одреди коефицијенте правца правама које садрже:

а) $(2, 5)$ и $(6, 7)$ **б)** $(2, -3)$ и $(-2, 6)$.

7. Нацртај график праве $x - 3y = 6$.

8. Одреди коефицијенте правца за сваку праву.

а) $y = 2x + 9$ **б)** $y = 7 - 3x$ **в)** $3x + 6y = 12$ **г)** $2y - 5x = 15$

9. Реши графички систем једначина:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-7y=-7 \end{cases}$$

10. w је директно пропорционално h.

$w=8$ када $h=12$

Одреди w када $h=15$.

11. Ако $a=5$ и $b=-2$, израчунај вредност израза:

а) a^2+b^2 **б)** $5a-6b$ **в)** $\frac{4a}{b}$ **г)** $2a^2+b$

12. Ослободи се заграда и упрости:

а) $(x+7)(x+2)$ **б)** $(x-6)(x+3)$ **в)** $(x+1)(x-2)$

г) $(x-5)(x-9)$ **д)** $(x+4)^2$ **ђ)** $(x-2)^2$

13. Реши следеће једначине.

а) $\begin{cases} 5x+2y=13 \\ x+2y=9 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x+2y=18 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3x-2y=15 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$

14. Симона користи метод покушаја и грешака да би нашла решење једначине $2x-\frac{1}{x}=9$

Она зна да је решење између 4 и 5.

Табела приказује њене прве две процене.

Процена	$2x-\frac{1}{x}$	Коментар
4	$(2\cdot 4)-(1:4)=7{,}75$	премало
5	$(2\cdot 5)-(1:5)=9{,}8$	превелико

Настави да попуњаваш табелу да пронађеш решење једначине.

Заокругли решење на једно децимално место.

15. Реши неједначине.

За сваку неједначину прикажи решење на бројевној оси.

а) $2x \geq 8$ **б)** $x-4<7$ **в)** $3x+1 \geq 8$ **г)** $3x+5 \leq x-8$

8 Геометрија и решавање проблема

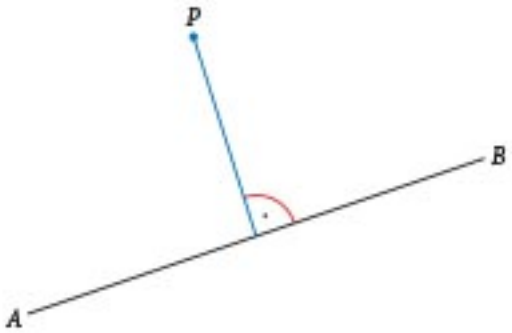
Наставни циљеви

- Користи лењир и шестар:
  - за конструисање нормале из тачке на праву и нормале из тачке која припада правој;
  - за уписивање квадрата, једнакостраничних троуглова и правилних шестоуглова и осмоуглова цртањем поделе круга;
- Проналажење геометријског места тачака на одређеном растојању од дате тачке или од дате праве.
- Прављење и коришћење цртежа у размери и тумачење географских карата.
- Израчунавање унутрашњих и спољашњих углова на било ком правилном многоуглу.
- Доказује да је збир спољашњих углова многоугла 360°.
- Решавање проблема коришћењем особина углова, паралелних правих и правих које се секу, троуглова, других многоуглова и круга, као и образлагање закључака и објашњавање размишљања дијаграмима и речима.
- Стварање шаблона који се понављају од троуглова до четвороуглова о покривању равни користећи збир углова, ротацију за 180° и транслацију; познавање тога који ће правилан многоугао покрити раван и објашњење зашто то остали не могу.
- Мерење углова у смеру кретања казаљки на сату са севера за решавање проблема повезаних са правцем и смером.
- Познавање и коришћење Питагорине теореме за решавање проблема са равни, укључујући правоугле троуглове.
- Заокругљивање бројева до одређеног броја децималних места; заокругљивање користи да би се дошло до решења проблема уз одређени степен тачности.

8.1 Конструкција правих

Конструкција нормалне праве кроз дату тачку изван праве

На цртежу су представљене права AB и тачка P која не се не налази на правој AB.



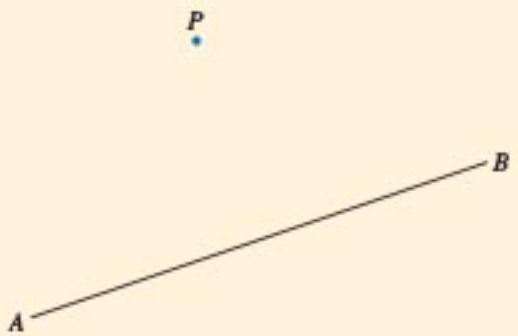
Најкраће растојање од P до праве је приказано на цртежу.

Дужина најкраћег растојања је дуж која је **нормална** на праву AB. То значи да та дуж захвата прави угао са правом AB.

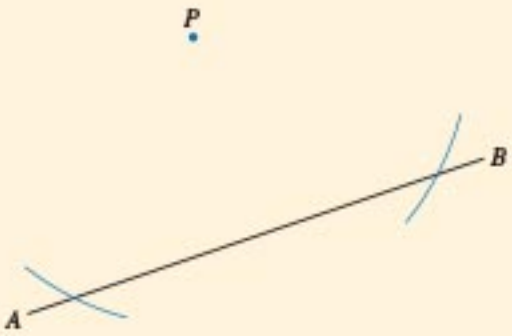
У следећем примеру ћемо показати како да конструишемо дуж најкраћим растојањем само лењиром и шестаром.

Пример 1

Конструиши праву кроз P која је нормална на праву AB..



Шестаром цртамо два иста кружна лука са центром у P тако што лукови секу AB у две различите тачке.



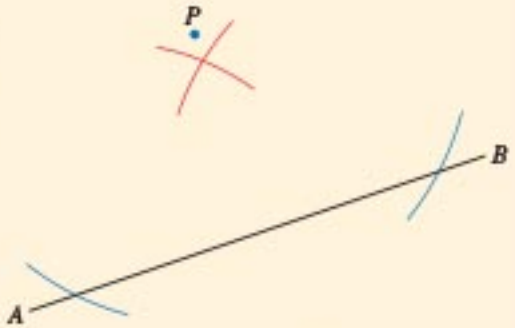
Затим, треба да конструишемо симетралу дужи између две добијене тачке.

Цртамо по један кружни лук на странама праве AB, са центром у једној од тачака.

Поступак понављамо са центром у другој тачки.

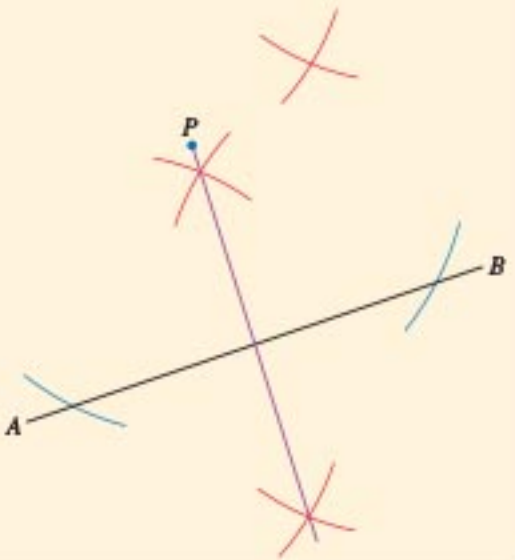
У току целе конструкције за четири последња лука не мењамо угао краковима шестара.

Лењиром повезујемо пресеке лукова као што је приказано на цртежу.



Лењиром повезујемо пресеке лукова као што је приказано на цртежу.

Конструишемо праву кроз P која је нормална на AB.



Конструкција нормале на правој кроз дату тачку која лежи на правој

Показаћемо како да конструишемо нормалу на праву из тачке која се налази на правој.

У следећем примеру показаћемо све кораке овог поступка.

Пример 2

Нацртај праву, нормалну на дату праву, која пролази кроз тачку P која се налази на правој.



Прво цртамо два кружна лука са центром у P тако што они секу праву у две различите тачке које су на истом растојању од P.

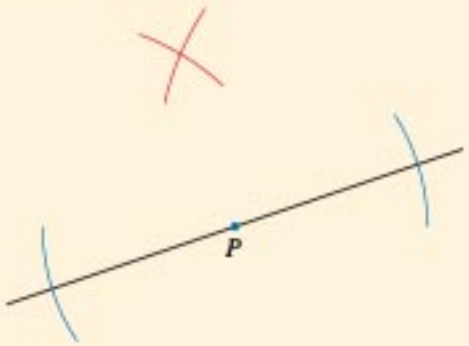


Следеће, цртамо симетралу дужи између те две тачке.

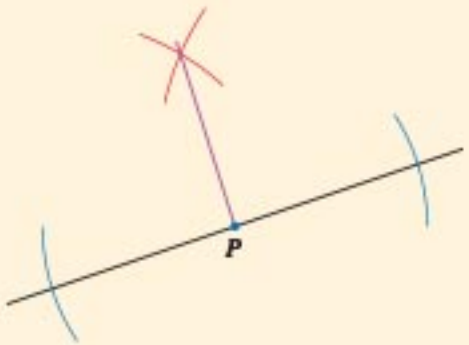
Цртамо кружни лук на једној страни праве са центром у другој тачки.

Цртамо кружни лук на другој страни праве са центром у другој тачки.

Исто као и у претходном примеру, у току целе конструкције последња два лука не мењамо угао краковима шестара.



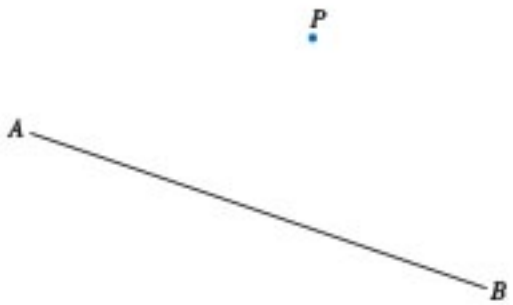
Пресек лукова повезујемо у тачки P.



Конструишемо тражену праву.

Задачи

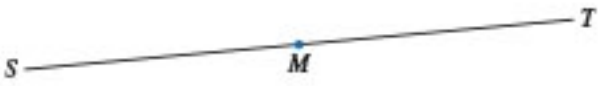
1. Прецртај цртеж у свеску.



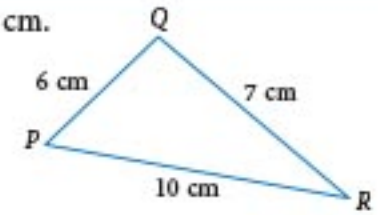
Конструиши праву кроз P која је нормална на праву AB.

2. Прецртај цртеж у свеску.

Конструиши праву кроз M која је нормална на праву ST.



3. PQR је троугао са страницама: $\overline{PQ} = 6$ cm, $\overline{QR} = 7$ cm и $\overline{PR} = 10$ cm.



а) Конструиши прецизан цртеж троугла.

б) Конструиши праву кроз Q нормалну на $\overline{PR}$.

Означи са M тачку у којој добијена права сече $\overline{PR}$.

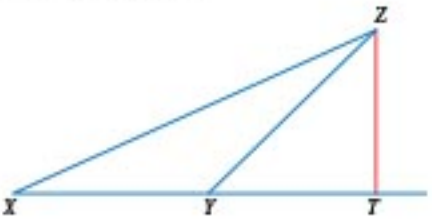
в) Измери дужину $\overline{QM}$.

г) Користи ту дужину да израчунаш површину троугла PQR.

4. XYZ је троугао. $\overline{XY} = 5$ cm, $\overline{YZ} = 7$ cm и $\overline{XZ} = 11$ cm.

а) Конструиши прецизан цртеж за троугао XYZ.

б) Продужи страну троугла из тачке Y.



Нацртај нормалу од Z до ове праве.

Означи је тачком T у којој нормала сече праву.

в) Измери дужину $\overline{ZT}$.

г) Израчунај површину троугла XYZ.

5. **а)** Нацртај дуж чија је дужина 10 cm.

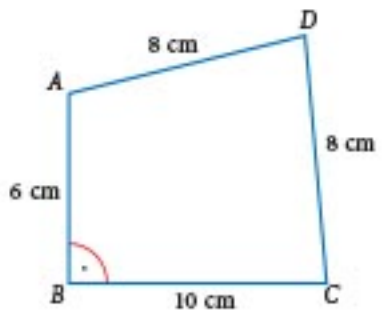
Означи две тачке на дужи чије је растојање тачно 6 cm.

б) Конструкцијом нормала, нацртај правоугаоник дужине 6 cm и ширине 4 cm.

Сваки унутрашњи угао правоугаоника је 90°. Започни са конструисањем правих углова у две тачке које су удаљене 6 cm.

в) Одреди дужину дијагонале правоугаоника.

6. Конструиши прецизан цртеж четвороугла $ABCD$ приказаног доле.



а) Нацртај праву и означи тачке B и C тако да је њихово међусобно растојање 10 cm.

б) Конструиши праву кроз B која је нормална на $\overline{BC}$.

На тој правој означи тачку A на растојању од 6 cm нагоре на правој.

Да би конструисао/конструисала прави угао, праву мораш наставити улево од тачке B.

в) Шестаром нацртај лук са центром у A и полупречником од 8 cm.

Нацртај други лук са центром у C, који има исти полупречник.

Означи тачку D у пресечној тачки два лука.

Нацртај праве AD и CD.

г) Одреди величину угла ADC.

8.2 Конструкција правилних многоуглова

У овом делу ћемо научити како да **конструишемо** правилан **многоугао** уписан у кружницу.

Сва темена многоугла треба да се налазе на кружници.

У следећим примерима су приказани начини конструкција правилног шестоугла, једнакостраничног троугла, квадрата и правилног осмоугла.

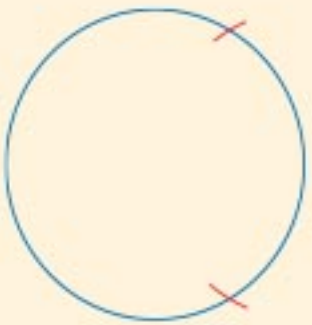
Пример 1

Конструиши правилан шестоугао уписан у кружницу са полупречником 5 cm.

Прво цртамо кружницу полупречника 5 cm.

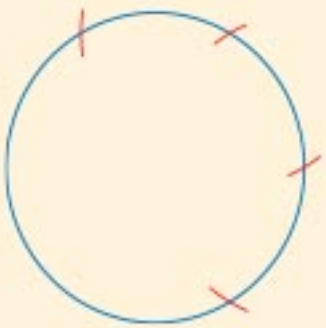
Током читавог поступка нећемо мењати угао између кракова шестара.

Стављамо врх шестара у једну тачку кружнице.

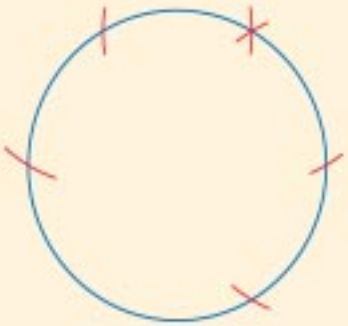


Цртамо два кружна лука у тој тачки кружнице тако што лукови секу кружницу у две различите тачке.

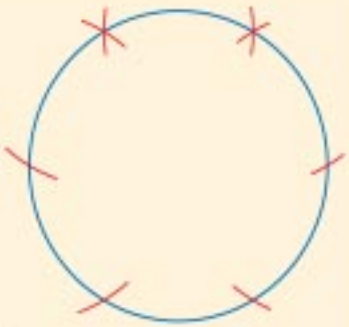
Цртамо два нова кружна лука са центром у једној пресечној тачки тако да секу кружницу у две различите тачке.



Поново цртамо два кружна лука са центром у новој тачки тако да секу кружницу у две различите тачке.

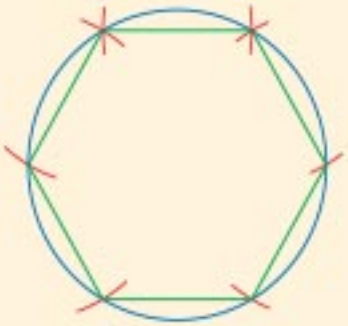


Поступак понављамо за све нове тачке све док не означимо шест различитих тачки на кружници.



На крају повезујемо свих шест тачки на кружници које формирају правилан шестоугао.

Свака страница шестоугла је једнака полупречнику кружнице.



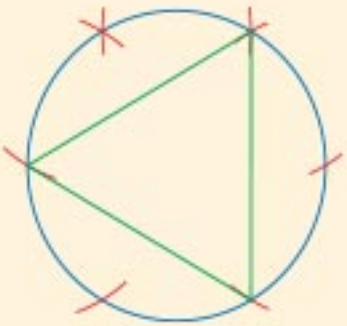
Пример 2

Конструиши једнакостраничан троугао уписан у датој кружници.

Понављамо све кораке за цртање шестоугла (из примера 1) до означавања шест тачака.

На крају повезујемо три од шест тачака, при чему водимо рачуна о томе које три тачке повезујемо да бисмо добили једнакостраничан троугао.

Добијамо једнакостраничан троугао уписан у кружницу.

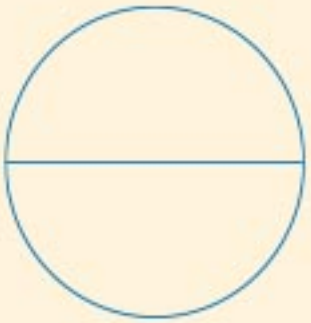


Пример 3

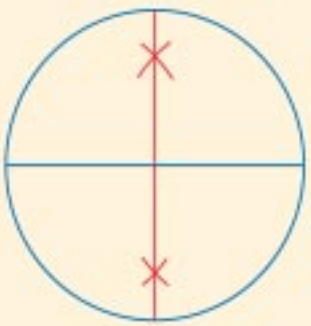
Конструиши квадрат уписан у кружницу са пречником 10 cm.

Прво цртамо кружницу са тачним пречником.

Цртамо пречник кружнице.



Конструишемо симетралу пречника помоћу лукова изнад и испод пречника.



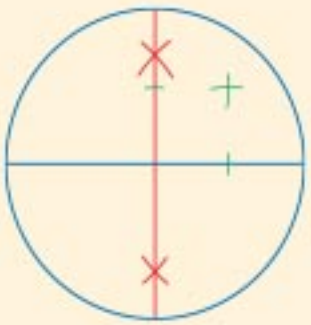
Повезујемо четири тачке у којима пречник и симетрала секу кружницу.

Конструишемо квадрат уписан у кружницу.



Пример 4

Конструиши правилан осмоугао уписан у кружницу са пречником 10 cm.



Пратимо прва три корака за конструкцију квадрата (из примера 3).

Добијамо две узајамно нормалне дужи (пречник и његова симетрала), које се секу у центру кружнице.

Конструишемо симетралу у једном од правих углова. Цртамо кружне лукове са центром у центру кружнице тако што секу краке правог угла у две тачке. Из сваке тачке повлачимо по један кружни лук тако да се оба кружна лука секу у једној тачки.

Конструишемо праву кроз пресек кружних лукова и центар кружнице која треба да пресече кружницу.

Затим конструишемо симетралу за друга два права угла који треба да пресеку кружницу.

Добијамо дати цртеж.



Повезујемо осам добијених тачака на кружници и добијамо правилан осмоугао.



Задаци

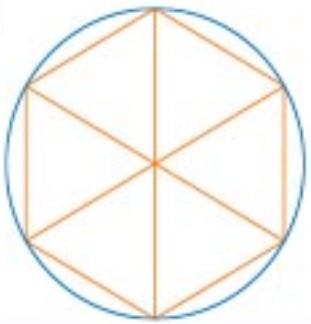
1. Нацртај кружницу са полупречником 6 cm.
   - **а)** Конструиши квадрат описан у датој кружници.
   - **б)** Одреди дужину дијагонале квадрата.
   - **в)** Одреди дужину странице квадрата.
2. Нацртај кружницу са полупречником 6 cm.
   - **а)** Конструиши једнакостраничан троугао уписан у кружницу.

б) Одреди дужину странице троугла.

в) Израчунај површину троугла.

3. Упиши следеће облике кружнице са полупречником 5 cm.

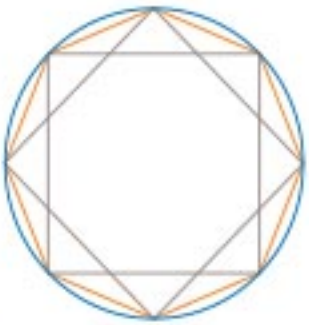
а)



б)



в)



У задацима 4 и 5 нацртај кружницу са полупречником од најмање 5 cm. Тако ћеш лако моћи да нацрташ симетрале.

4. Конструиши правилан шестоугао уписан у кружницу.

Конструиши симетралу на свакој његовој страници.

Користи ове симетрале да би конструисао/конструисала правилан дванаестоугао уписан у кружницу.

5. Конструиши правилан осмоугао уписан у кружницу.

Користи осмоугао да би конструисао/конструисала правилан шеснаестоугао уписан у кружницу.

8.3 Геометријско место тачака

Геометријско место тачака (ГМТ) јесте скуп тачака које испуњавају дате особине.

ГМТ може бити линија или област.

Пример 1

Нађи геометријско место тачака које су удаљене 3 cm од тачке X.

X

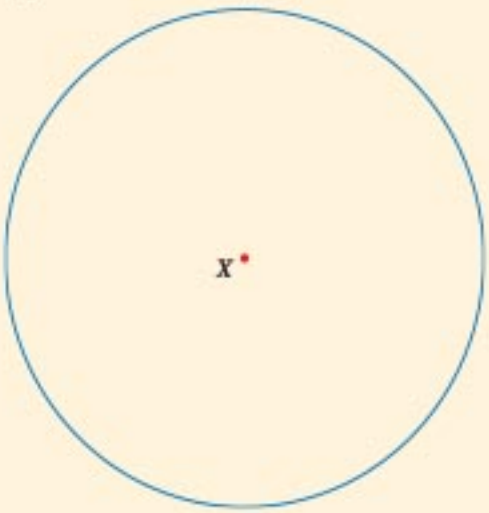
Помоћу лењира можеш наћи више тачака које су удаљене 3 cm од X.

На цртежу је приказано неколико важних тачака обојених плавом бојом.



Ипак, постоји много тачака које испуњавају дати услов.

Јасно је да се све налазе на кружници са полупречником 3 cm.



Ова кружница је геометријско место тачака које су удаљене 3 cm од X.

Пример 2

$\overline{PQ}$ дуж дужине 3 cm.



Нацртај геометријско место тачака које су удаљене тачно 2,5 cm од крајњих тачака на дужи $\overline{PQ}$.

На једној страни $\overline{PQ}$ цртамо дуж паралелну са $\overline{PQ}$, која је удаљена 2,5 cm од ње.



Све тачке нове дужи су удаљене 2,5 cm од $\overline{PQ}$, па је ова дуж део траженог геометријског места тачака.

На другој страни $\overline{PQ}$ можемо да нацртамо другу дуж.

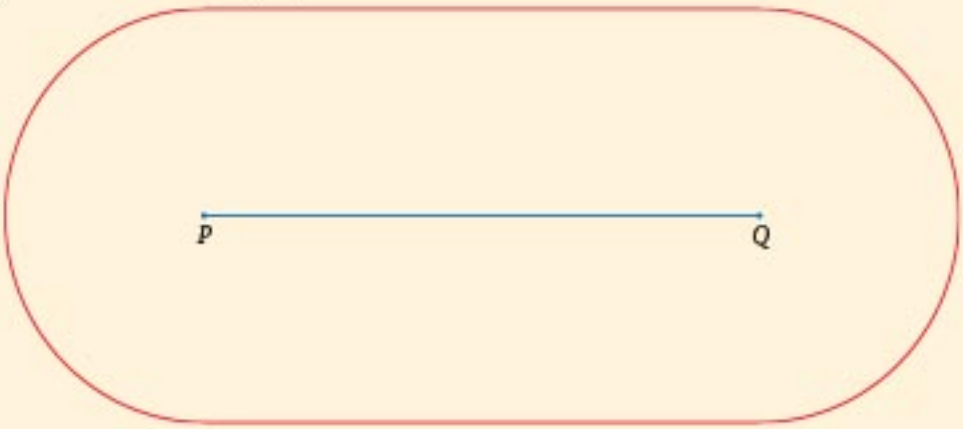


На левом крају дужи $\overline{PQ}$, геометријско место тачака ће се састојати од свих тачака које су удаљене 2,5 cm од тачке P.

То је полукружница са центром P и полупречником од 2,5 cm.

Слична другом крају дужи $\overline{PQ}$, код тачке Q, налази се друга полукружница.

На цртежу је представљено тражено геометријско место тачака у целости.



Задаци



1. Један паук се налази на крају казаљке на сату.

Казаљка је дуга 4,8 cm.

Нацртај геометријско место тачака кроз које пролази паук док сат ради.

2. Једна слика је окачена на зид у једној галерији.

Дата је горња перспектива зида са сликом.



Посетиоцима у галерији је забрањен приступ слици ближе од 2 метра.

Галерија је одлучила да постави малу ограду да би задржала људе даље од слике.

Нацртај цртеж да би приказао/приказала геометријско место свих тачака које су удаљене 2 метра од слике.

3. Означи тачку A у свесци.

Нацртај геометријско место тачака које су удаљене 3,5 cm од A.

4. У свесци нацртај дуж дужине 4,5 cm.

Нацртај геометријско место тачака које су удаљене 3,5 cm од A.

5. Нацртај две тачке међусобно удаљене 6 cm. Означи тачке словима A и B.

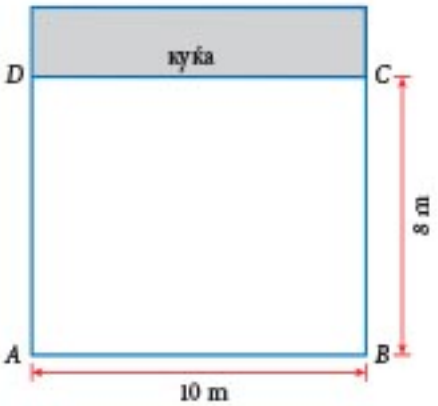
ГМТ које су на истом растојању од једне тачке је кружница.

а) Нацртај геометријско место тачака које су удаљене 4 cm од тачке A.

б) Нацртај геометријско место тачака које су удаљене 4 cm од тачке B.

в) Колико је тачака удаљено 4 cm од тачака A и B. Означи те тачке на цртежу.

6. Дат је план правоугаоне баште ABCD. Димензије баште су 10 метара и 8 метара. Власник жели да посади дрво у башти. Он хоће да дрво буде удаљено тачно 5 метара од куће. Дрво такође треба да буде 4 метра од угла у тачки A.



а) Нацртај план баште. Користи размеру 1 cm да одговара 1 m.

б) На цртежу нацртај геометријско место тачака које су на растојању 5 метара од куће.

в) На цртежу нацртај геометријско место тачака које су на растојању 4 метра од тачке A.

г) Означи положај дрвета словом X.

X ће бити тачка где се секу два геометријска места тачака.

д) Измери растојање $\overline{BX}$.

7. Нацртај квадрат чије су странице 5 cm. Нацртај геометријско место тачкама које су изван квадрата које је удаљено тачно 3 cm од стране квадрата.

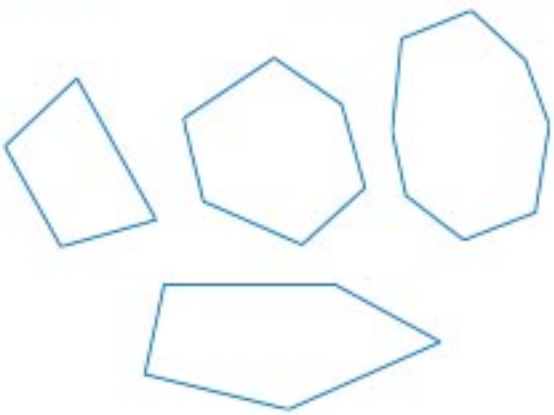
За свако теме постоји више тачака које су на растојању од 3 cm од темена. Те тачке формирају криву.

8.4 Углови многоугла

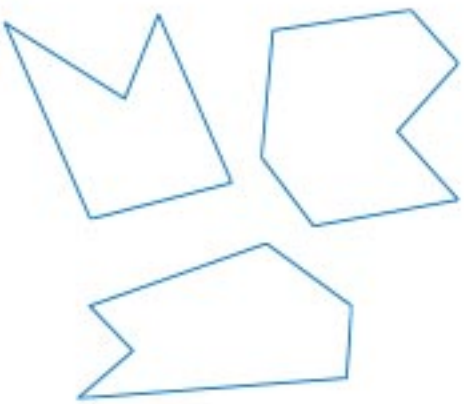
Унутрашњи углови

Многоугао је 2Д-форма са правим страницама.

Многоуглови могу да буду **конвексни** и **неконвексни**.



конвексни многоуглови



неконвексни многоуглови

Неконвексни многоуглови имају једно **теме** увучено у унутрашњости многоугаоника.

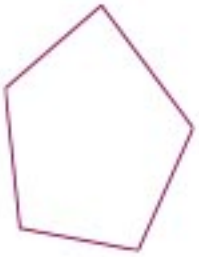
Ево неколико примера многоуглова.



троугао
3 странице



четвороугао
4 странице



петоугао
5 страница



шестоугао
6 страница



седмоугао
7 страница



осмоугао
8 страница



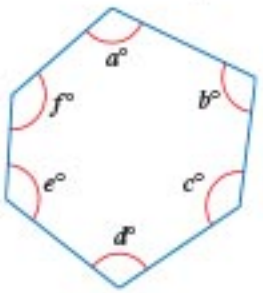
деветоугао
9 страница



десетоугао
10 страница

Унутрашњи углови многоугла су углови код темена унутар 2Д-форме.

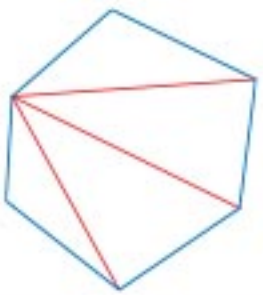
Унутрашњи углови овог шестоугла су $a°$, $b°$, $c°$, $d°$ и $f°$.



Цртањем **дијагонала** шестоугао можемо да поделимо на четири троугла.

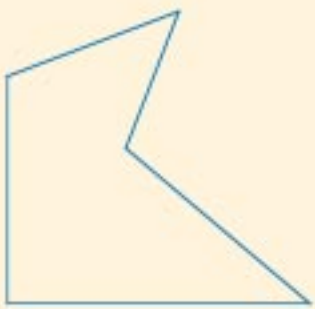
Збир унутрашњих углова сваког троугла је 180°.

Збир унутрашњих углова шестоугла је $4 \cdot 180° = 720°$.

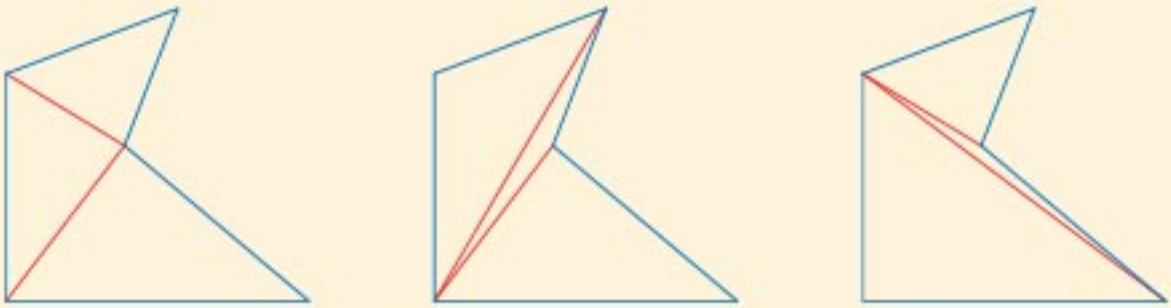


Пример 1

Цртањем дијагонала израчунај збир унутрашњих углова у приказаном петоуглу.



Постоји неколико начина да нацртамо дијагонале и да поделимо петоугао на троуглове.



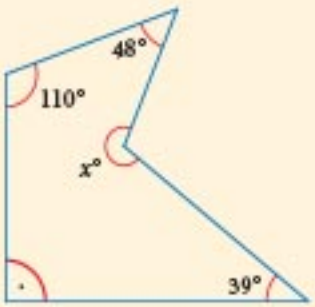
Без разлике на који начин цртамо дијагонале, увек постоје три троугла.

Значи, $3 \cdot 180° = 540°$

Збир унутрашњих углова у петоуглу је 540°.

Пример 2

Користи резултат из претходног примера да израчунаш непознати угао у приказаном петоуглу.



Збир четири дата угла је $48° + 110° + 90° + 39° = 287°$.

Збир унутрашњих углова у петоуглу је 540°.

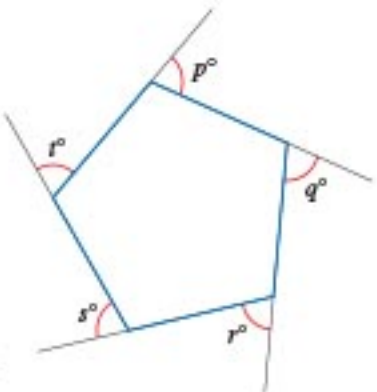
Непознати угао је $540° - 287° = 253°$.

Да проверимо да ли је угао већи од 180° и мањи од 270°. Добијено решење 253° је тачно.

Спољашњи углови

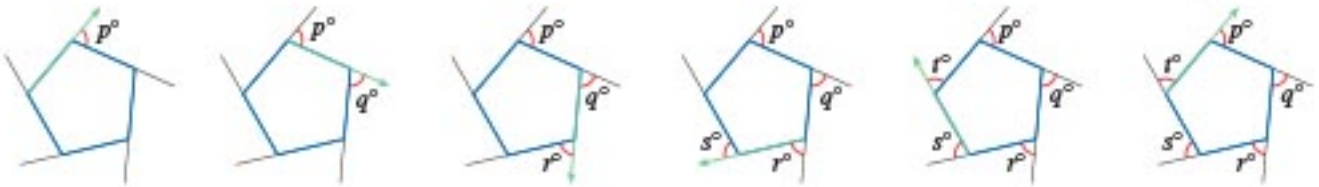
Спољашњи углови конвексног многоугла се формирају настављањем странице у сваком темену.

Спољашњи углови петоугла су приказани на цртежу десно.



У сваком темену унутрашњи и спољашњи угао припадају једној правој.

У сваком темену: **унутрашњи угао + спољашњи угао = 180°.**



Да замислимо једну стрелицу по дужини једне странице петоугла.

Она ротира за угао $p°$ у смеру кретања казаљки на сату и поклапа се са суседном страницом петоугла.

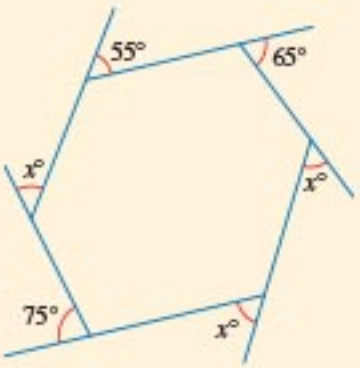
Затим, ротира за угао $q°$, па за $r°$, па за $s°$ и на крају за $t°$.

Ротација се све време врши у смеру кретања казаљки на сату. На крају, стрелица се поново враћа на место одакле је кренула. Она се окренула за 360°.

Показали смо да је **збир спољашњих углова конвексног многоугла 360°.**

Пример 3

Израчунај величину углова означених са $x°$ на цртежу.



Збир спољашњих углова је 360°.

$$55 + 65 + x + x + 75 + x = 360$$
$$195 + 3x = 360$$
$$3x = 165$$
$$x = 55°$$

Задаци

1. **а)** Нацртај осмоугао.

б) Нацртај дијагонале да поделиш осмоугао на троуглове.

в) Колико таквих троуглова постоји?

г) Израчунај збир унутрашњих углова осмоугла.

2. Препиши дату табелу у свеску.

Број страна	Назив многоугла	Број троугла	Збир унутрашњих углова
3	троугао	1	180°
4			
5			
6	шестоугао	4	720°
7			
8			
9			
10			
12	дванаестоугао		

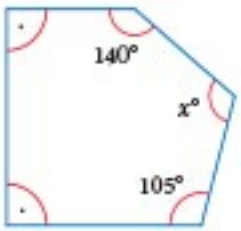
а) Запиши називе многоуглова. Неки називи су већ записани.

б) Нацртај цртеж за сваки многоугао и подели многоуглове на троуглове. Запиши број троуглова у табели.

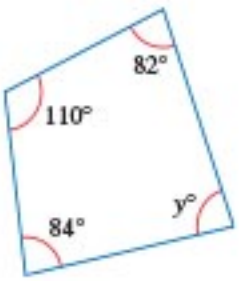
в) Израчунај збир унутрашњих углова и попуни задњу колону.

3. Користи решења из претходног задатка да пронађеш непознате углове у многоугловима.

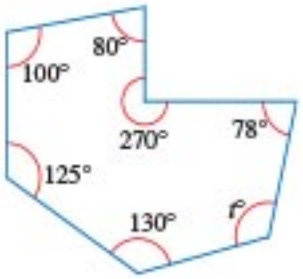
а)



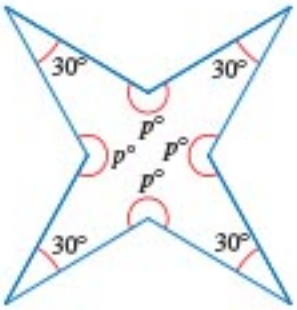
б)



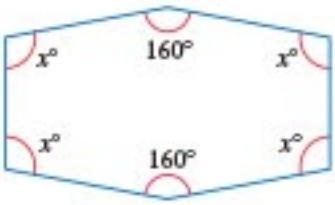
в)



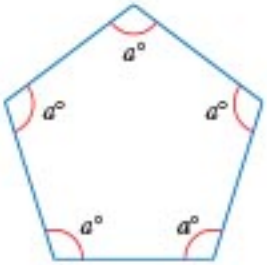
г)



д)

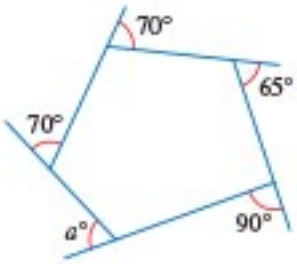


ђ)

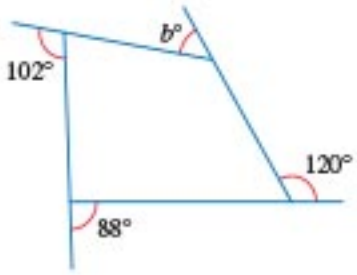


4. Израчунај непознате углове у многоугловима.

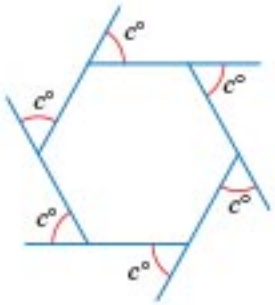
а)



б)



в)



5. Дате су четири тврдње о неконвексним многоугловима.

Одреди које су тачне, а које нису тачне.

Нацртај цртеже да објасниш своје одговоре.

а) Неконвексни многоуглови имају бар један унутрашњи угао већи од 180°.

б) Неконвексни многоуглови не могу да се поделе на троуглове.

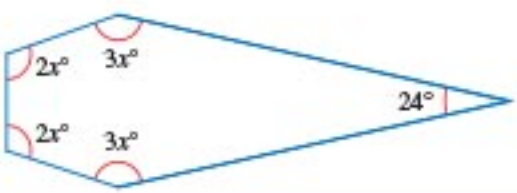
в) Немогуће је да се нацрта неконвексни троугао.

г) Немогуће је да се нацрта неконвексни четвороугао.

Можда ће бити потребно да нацрташ неколико скица пре но што установиш да ли многоуглови могу да се конструишу.

6. На цртежу је приказан конвексни петоугао.

Израчунај вредност за x.



Састави једначину користећи дате углове и збир углова у петоуглу.

Правилни многоуглови

Све странице **правилног многоугла** су међусобно једнаке.

Сви углови правилног многоугла су међусобно једнаки.

Збир унутрашњих углова

Ако многоугао има n страница, он може да се подели на $n - 2$ троугла.

Збир унутрашњих углова је $(n - 2) \cdot 180°$ или $180°(n - 2)$.

Тако добијамо општу формулу:

Збир унутрашњих углова многоугла који има n страница је $180° (n - 2)$.

Збир спољашњих углова

Многоугао има n страница.

У сваком темену, унутрашњи угао + спољашњи угао = 180°.

Има n темена, па збир свих унутрашњих углова + спољашњи углови = $180° \cdot n$ или $180°n$.

Али, збир унутрашњих углова је $180° (n - 2)$.

Према томе, збир спољашњих углова $= 180n - 180(n - 2)$

$= 180n - 180n + 360$

$= 360$

Показали смо да је збир спољашњих углова многоугла 360°.

Пример 4

Израчунај збир унутрашњих углова многоугла са 20 страница.

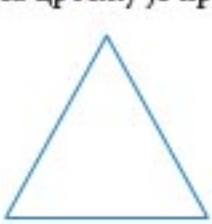
Замењујемо $n = 20$ у формули $180° (n - 2)$.

$180 \cdot (20 - 2) = 180 \cdot 18$

$= 3240$

Збир унутрашњих углова је 3240°.

На цртежу је приказано неколико правилних многоуглова.



једнакостранични троугао



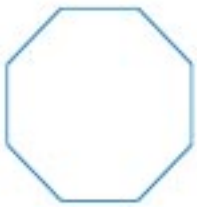
квадрат



правилан петоугао



правилан шестоугао



правилан осмоугао

Спољашњи угао

Збир спољашњих углова правилног многоугла је 360°.

Сви спољашњи углови су међусобно једнаки.

Сваки спољашњи угао = 360°: са бројем страница многоугла.

$$\textbf{спољашњи угао правилног многоугла са } n \textbf{ страница} = \frac{360^\circ}{n}$$

Унутрашњи угао

Постоје два начина за одређивање унутрашњих углова правилног многоугла.

1 Помоћу формуле за збир унутрашњих углова.

Збир унутрашњих углова многоугла са n страница је $180^\circ\,(n-2)$

Сви унутрашњи углови су једнаки.

$$\textbf{Унутрашњи угао правилног многоугла са } n \textbf{ страница} = \frac{180^\circ\,(n-2)}{n}$$

2 Помоћу спољашњих углова.

Сваки спољашњи угао = $\frac{360^\circ}{n}$

Збир спољашњег и унутрашњег угла у сваком темену је 180°.

$$\textbf{унутрашњи угао правилног многоугла са } n \textbf{ страница} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Пример 5

Један правилан многоугао има 15 страна.

а) Израчунај унутрашњи угао.

б) Израчунај спољашњи угао.

в) Провери да ли је њихов збир 180°.

а) Замењујемо $n = 15$ у $\frac{180 \cdot (n-2)}{n}$

$$= \frac{180 \cdot (15-2)}{15}$$
$$= \frac{180 \cdot 13}{15}$$
$$= \frac{2340}{15}$$
$$= 156$$

Сваки унутрашњи угао је 156°.

б) Замењујемо: $n = 15$ у $\frac{360}{n}$

$$= \frac{360}{15}$$
$$= 24$$

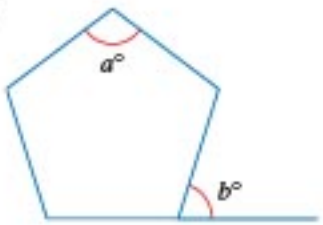
Сваки спољашњи угао је 24°.

в) Провера: $156^\circ + 24^\circ = 180^\circ$ ✓

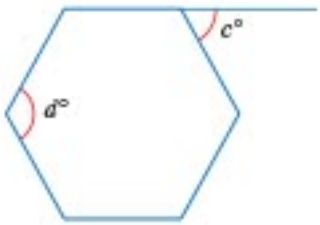
Задаци

1. На цртежима су дати правилни многоуглови. Израчунај углове означене словима.

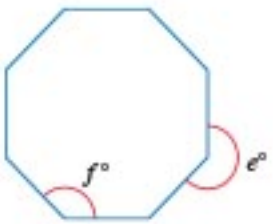
а)



б)



в)



2. Израчунај: **i** унутрашњи угао и **ii** спољашњи угао правилног многоугла са:

а) 9 страница

б) 12 страница

в) 20 страница

г) 7 страница.

3. Препиши и попуни табелу за правилне многоуглове. Неки углови су већ записани.

Број страница	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
Спољашњи угао	120°									24°	
Унутрашњи угао										156°	

4. Користи табелу из задатка 3 да одговориш на следећа питања:

а) Шта се догађа са спољашњим углом када се повећа број страница многоугла?

б) Шта се догађа са унутрашњим углом када се повећа број страница многоугла?

в) Израчунај унутрашњи угао правилног многоугла са 100 страница да провериш свој одговор под **б)**.

5. На датим цртежима приказано је теме правилног многоугла.

Израчунај колико страница има сваки.

а)



б)



Прво израчунај спољашњи угао.

6. Постоје две формуле за израчунавање унутрашњег угла x правилног многоугла.

Једна од њих је $x^\circ = \frac{180(n-2)^\circ}{n}$.

Ослободи се заграде и упрости једначину.

Покажи да је она еквивалентна једначини $x^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

Након ослобађања од заграда израз запиши са два разломка.

Углови и праве

Када се две праве секу формирају се четири угла.

Ти углови су међусобно једнаки, два по два.

Њих називамо **унакрсним** угловима.

На цртежу су приказана два пара унакрсних углова.



Унакрсни углови су међусобно једнаки.

Када једна права сече две паралелне праве, постоје два пресека или две пресечне тачке.

Праву која сече обе паралелне праве називамо трансверзала.

Сагласни углови су углови који се налазе на истој страни трансверзале од којих је један унутрашњи, а други спољашњи.

На цртежима су приказани неки парови сагласних углова.



Сагласни углови су међусобно једнаки.

Наизменични углови се налазе на различитим странама трансверзале и оба угла су спољашња или су оба угла унутрашња.

На цртежима су приказани неки парови наизменичних углова.



Наизменични углови су међусобно једнаки.

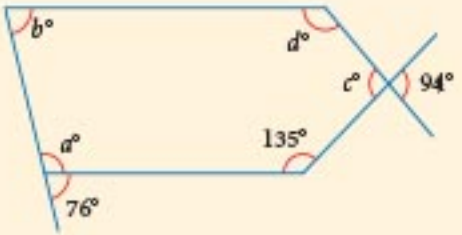
Приликом решавања задатака увек треба да наведемо зашто су неки углови једнаки.

Пример 6

Израчунај величину углова означених словима на цртежу.

Хоризонталне странице су паралелне.

Објасни своја решења.



$a° = 180° - 76°$

$= 104°$ Збир углова који формирају праву је 180°.

$b° = 76°$ Сагласни углови.

$c° = 94°$ Унакрсни углови.

Упамтимо, када се две праве секу, онда постоје два пара унакрсних углова. Унакрсни углови су једнаки.

$d° = 540° - (104° + 76° + 135° + 94°)$

$= 540° - 409°$

$= 131°$ Збир уну трашњих углова у петоуглу је 540°.

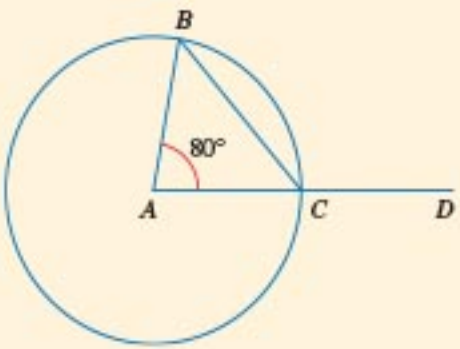
Пример 7

Тачка A је центар кружнице.

Тачке B и C су тачке кружнице.

ACD је права.

$\sphericalangle BAC = 80°$



а) Израчунај $\sphericalangle ABC$.

б) Израчунај $\sphericalangle BCD$.

Објасни добијена решења.

а) $\overline{AB} = \overline{AC}$ Обе дужи су полупречници кружнице.

Троугао ABC је једнакокраки троугао.

$\sphericalangle ABC = (180° - 80°) : 2$ Збир углова у једнакокраком троуглу је 180°.

$= 50°$

б) $\sphericalangle ACB = 50°$

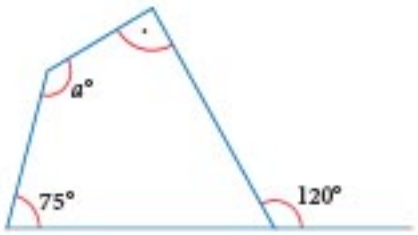
$\sphericalangle BCD = 180° - 50°$ Збир углова који формирају праву је 180°.

$= 130°$

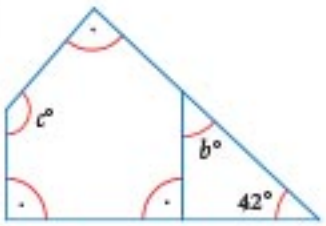
Задаци

1. Израчунај углове на цртежима означеним словима.

а)

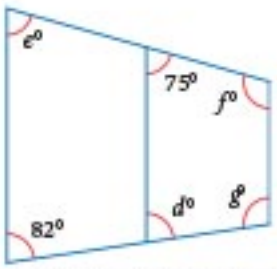


б)



Вертикалне странице су паралелне.

в)



Вертикалне стране су паралелне.

2. ABC је троугао.

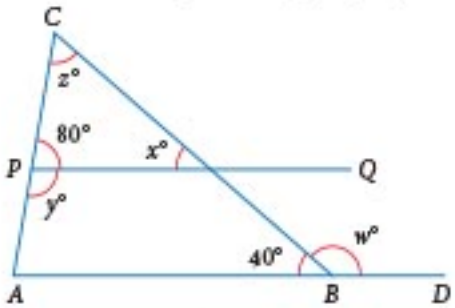
PQ је права паралелна са AB.

$\sphericalangle ABC = 40°$

$\sphericalangle CPQ = 80°$

Израчунај углове $w°$, $x°$, $y°$ и $z°$.

Објасни своја решења.



3. $ABCDE$ је петоугао.

AM је оса симетрије.

$\sphericalangle ABC = 85°$

$\sphericalangle CDE = 130°$

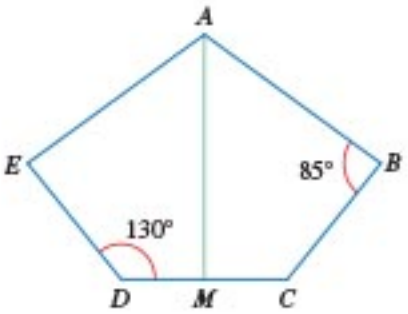
Израчунај:

а) $\sphericalangle AED$

б) $\sphericalangle BCD$

в) $\sphericalangle BAE$

г) $\sphericalangle AMC$.



4. $ABCDEF$ је правилан шестоугао.

а) Израчунај $\sphericalangle ABC$.

Нацртана је дијагонала од A до C.

б) Којој врсти троугла припада ABC?

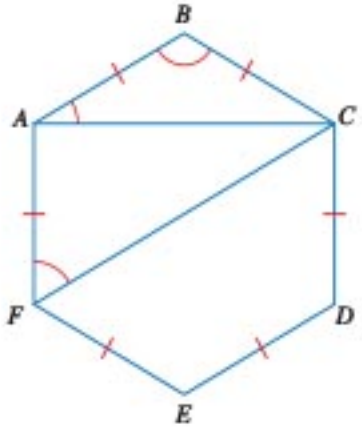
в) Израчунај $\sphericalangle BAC$.

г) Израчунај $\sphericalangle CAF$.

Друга дијагонала је нацртана од C до F.

д) Израчунај $\sphericalangle AFC$.

ђ) У коју врсту спада троугао ACF?

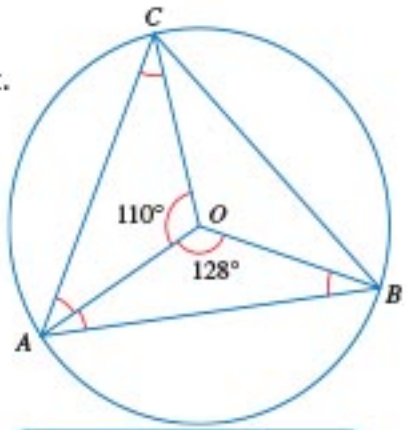


5. На цртежу је приказана кружница са центром у O.

ABC је троугао чија темена A, B и C се налазе на кружници.

$\sphericalangle AOB = 128°$

$\sphericalangle AOC = 110°$



а) Израчунај угао BOC. Објасни добијено решење.

б) Израчунај угао OCA. Објасни добијено решење.

в) Израчунај угао OCB. Објасни добијено решење.

г) Израчунај угао ACB.

д) Покажи да је угао AOB два пута већи од угла ACB.

O је центар кружнице, па $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Користи својства једнакостраничних троуглова.

Овај задатак је пример за једно опште правило:

Угао са теменом у кружници је два пута мањи од угла са теменом у њеном центру изнад истог кружног лука.

8.5 Правилни мозаици

Математика у дизајну



На слици је приказан део зида краљевске палате Алказар у Севиљи, Шпанија, коју су оригинално дизајнирали маварски краљеви. Ова стара краљевска палата је сада део светске баштине Унеска.

У њој се налазе лепи примери о томе како су исламски грађевинари и архитекте користили математичке облике да би конструисали мозаике.

У Македонији постоје сачувани остаци прекрасних мозаика на археолошком локалитету Хераклеја у Битољу.

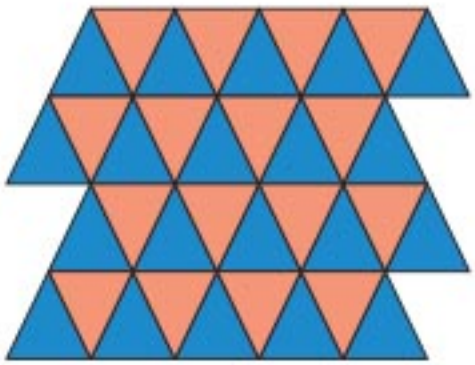




Тесалација или поплочивање је поступак покривања равне површине једне или комбиновањем више 2Д-форми без преклапања и без празнина између њих.

Тесалацију можемо направити и од правилних многоуглова.

На слици је приказана тесалација направљена од једнакостраничних троуглова.



Једнакостранични троугао је **правилан многоугао.**

Један многоугао је правилан ако су све његове странице међусобно једнаке и сви његови углови су такође међусобно једнаки.

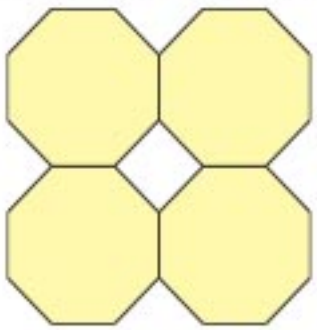
Тесалацију којом комбинујемо једну врсту правилног многоугла називамо **правилном тесалацијом.**

Сваки унутрашњи угао у једнакостраничном троуглу је 60°.

У сваком темену мозаика „сусреће“ се шест углова.

За шему знамо да је мозаик, зато што је $6 \cdot 60° = 360°$, или то можемо утврдити тако што је величина унутрашњег угла (60°) делилац од 360°.

На цртежу је приказана шема за неколико правилних осмоуглова.



Ако поређамо четири правилна осмоугла, приметићемо да се међу њима јавља празнина у облику квадрата.

Од правилних осмоуглова не може се направити правилна тесалација.

Да проверимо унутрашње углове.

Сваки унутрашњи угао правилног осмоугла је 135°.

$135° \cdot 2 = 270°$ и $135° \cdot 3 = 405°$, значи 135° није дељиво са 360°.

Закључујемо да није могуће поставити углове од 135° са заједничким теменом у једној тачки, а да се не појави празнина.

Пример

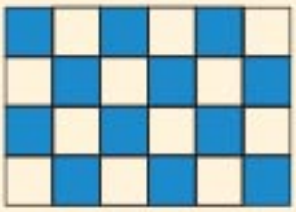
а) Формирај тесалацију од правилних четвороуглова.

б) Одреди величину унутрашњег угла правилног четвороугла и објасни зашто је могућ мозаик под **а)**.

а) Правилни четвороугао има четири једнаке странице и четири једнака угла.

То је квадрат.

На цртежу десно приказано је формирање тесалације од квадрата.



б) Унутрашњи угао квадрата је 90°.

90° је делилац за 360° зато што $4 \cdot 90° = 360°$.

Постоје четири угла по 90° који „се сусрећу“ у сваком унутрашњем темену мозаика.

Задаци

1. **а)** Израчунај унутрашњи угао правилног шестоугла.

б) Покажи да је 120° делилац за 360°.

в) Нацртај тесалацију користећи правилне шестоуглове.

Погледај тему 3 ако је потребно да се подсетиш.

2. Претходно смо учили о израчунавању унутрашњег угла неколико правилних многоуглова.

У табели су приказани унутрашњи углови неколико правилних многоуглова.

Број страница	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
Унутрашњи угао	60°	90°	108°	120°	126.6°	135°	140°	144°	150°	156°	162°

Показали смо да су унутрашњи углови правилних многоуглова са 3, 4 и 6 страница делиоци за 360°.

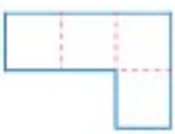
а) Провери да ли су још неки унутрашњи углови делиоци за 360°.

б) Покажи да постоје само три правилна мозаика.

Делилац за 360 је број са којим се 360 дели без остатка.

3. 2Д-форма у облику слова L је формирана од четири квадрата.

Нацртај две различите тесалације из ове 2Д-форме.



Користи свеску са квадратићима за лакше цртање мозаика.

4. Знамо да са 2 правилна осмоугла и једним квадратом можемо да направимо тесалацију.

Тесалацију у којој се користе два или више различитих правилних многоуглова називамо **полуправилном тесалацијом.**

а) Сабери унутрашње углове два осмоугла и једног квадрата.

Покажи да је њихов збир 360°.

б) Сабери унутрашње углове два шестоугла и два једнакостранична троугла.

Покажи да је њихов збир 360°.

в) Нацртај полуправилну тесалацију са два шестоугла и два троугла у сваком унутрашњем темену.

г) Провери да ли можеш да пронађеш другу комбинацију унутрашњих углова чији је збир 360°.

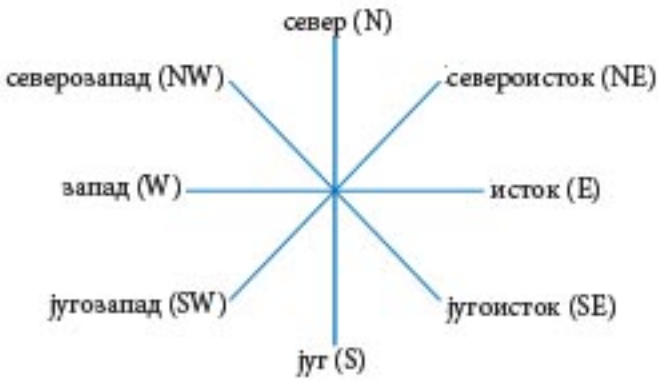
Нађи другу полуправилну тесалацију.

Постоји укупно 8 таквих комбинација, али неке од њих су теже за цртање.

8.6 Мапе и азимут

Азимут

Историјски гледано, путници су се најчешће оријентисали користећи **компас.**





На цртежу је приказано осам главних смерова компаса.

Њиховим комбиновањем добија се много смерова који се одређују компасом.

За савремена путовања, овај начин оријентације није довољно прецизан.

Данас се смерови дефинишу азимутом.

Азимут је угао, са једним краком на северу, измерен у смеру кретања казаљки на сату.

Азимути се обично записују са три цифре. Азимут од 45° се записује као 045°.

Следећи пример показује како да измеримо азимут угломером.

Пример 1

Нека су A, B и C три тачке на мапи.

а) Измери азимут од A до B.

б) Измери азимут од A до C.



C

B

а) Цртамо праву од A до B.

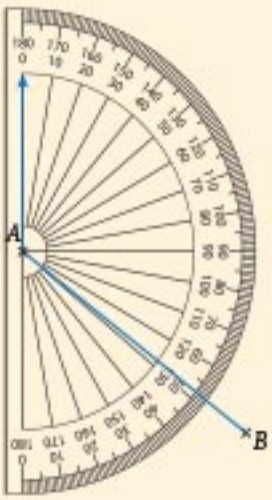
Угломер са ознаком 0° постављамо у смеру северно од A.

Центар угломера треба да буде постављен у тачку A.

Унутрашња скала је она која почиње са нулом на северној правој.

Читамо угао до B.

Азимут је 128°.



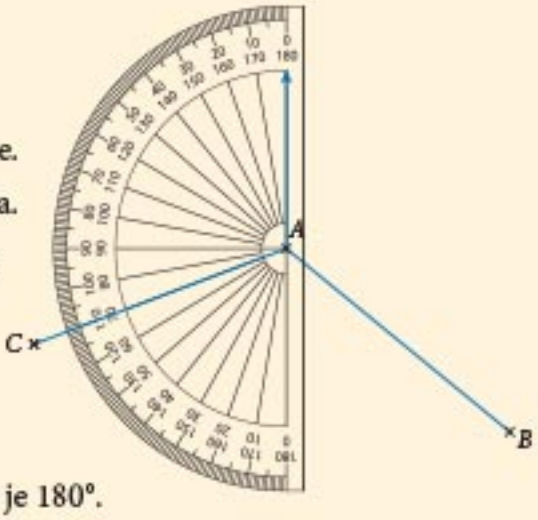
C

б) Цртамо праву од A до C.

Угломер постављен као под **а)** не можемо да користимо.

Да бисмо пронашли азимут за C, угломер постављамо на другој страни северне праве.

Постоји два начина за проналажење азимута.



Први начин: Читамо од југа (од јужне праве са почетком у 0°), у смеру кретања казаљки на сату, до праве AC.

Добили смо угао од 70°.

Угао од северне до јужне праве је 180°.

Азимут од A до C је $180° + 70° = 250°$.

Други начин: Читамо од севера (од северне праве са почетком у 0°) у смеру обрнутом од кретања казаљки на сату, до тачке C.

Добили смо угао од 110°.

Азимут од A до C је $360° - 110° = 250°$.

Размера мапа

Објекти и површине на мапама често су представљени у размери.

Размера 1 : 200000 на мапи значи да 1 центиметар на мапи представља 200000 центиметара на Земљи.

1 cm : 200000 cm

1 cm : 2000 m Делимо са 100 зато што у 1 метру има 100 центиметара.

1 cm : 2 km Делимо са 1000 зато што у 1 km има 1000 m.

Размера 1 : 200000 је једнака размери у којој је са 1 cm представљено 2 km.

Пример 2

Размера на мапи је 1 : 250000.

Пут на мапи је дугачак 6 cm.

Колика је реална дужина пута?

1 cm : 250000 cm

1 cm : 2500 m

1 cm : 2,5 km

Сваки центиметар на мапи представља 2,5 km.

Растојање од 6 cm на мапи представља $6 \cdot 2{,}5 = 15$ km.

Пример 3

На датој мапи приказано је острво на коме су град, лука и светионик.



Размера на мапи је 1 : 500000.

Израчунај: **а)** растојање између града и луке;

б) азимут од светионика до луке.

а) Размера на мапи је 1 : 500000.

1 cm : 500000 cm

1 cm : 5000 m

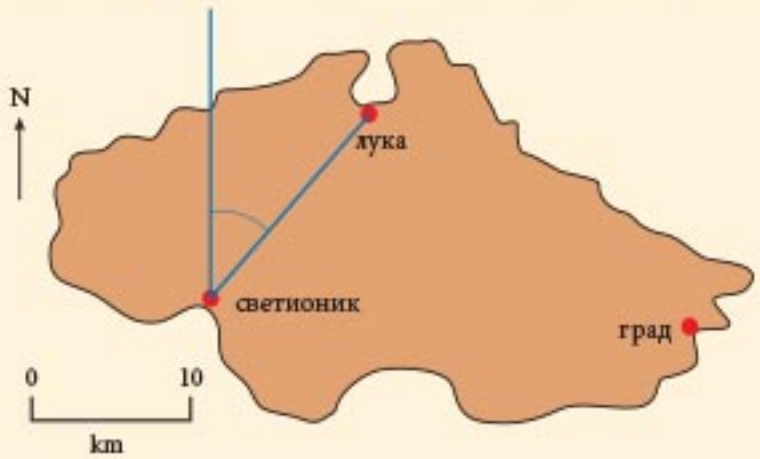
1 cm : 5 km

Сваки центиметар на мапи представља 5 km.

Растојање на мапи између града и луке је 4,8 cm.

Реално растојање је $4{,}8 \cdot 5 = 24$ km.

б) Цртамо северну праву у светионику и цртамо праву између светионика и луке.



Меримо угао означен између две праве.

Азимут је 042°.

Задаци

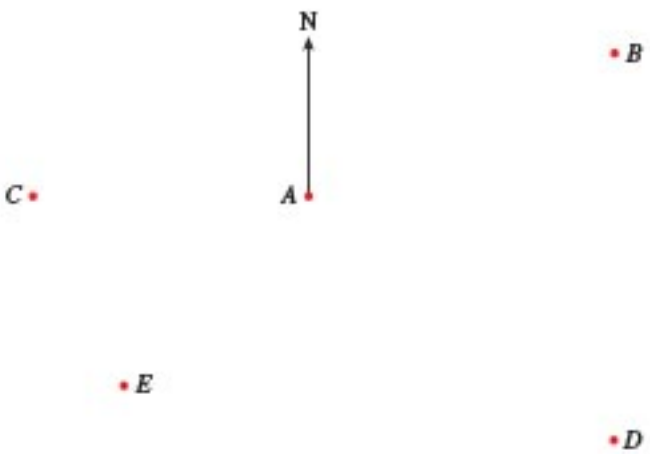
1. Дате су размере на мапи. Израчунај шта представља 1 cm у свакој размери.

а) 1 : 500000 **б)** 1 : 2000 **в)** 1 : 50000 **г)** 1 : 40000000 **д)** 1 : 25000000

2. Запиши следеће размере на мапама:

а) 1 cm представља 1 km **б)** 1 cm представља 50 km **в)** 1 cm представља 250 m

3. На цртежу је приказано пет места означених са A, B, C, D и E.



Измери азимут:

а) од A до B **б)** од A до C **в)** од D до A **г)** од C до E

4. Користи мапу из задатка 3 да одговориш на следећа питања:

а) Која тачка се налази северно од D?

б) Која тачка се налази југозападно од A?

в) Који је смер од C до A?

5. На мапи су приказана четири града.

Размера на мапи је 1 : 200000.



Размера 1 : 200000.

а) Израчунај колико је километара представљено са 1 cm на мапи.

б) Одреди растојање између Охрида и Штипа у километрима.

в) Израчунај азимут од Штипа до Охрида.

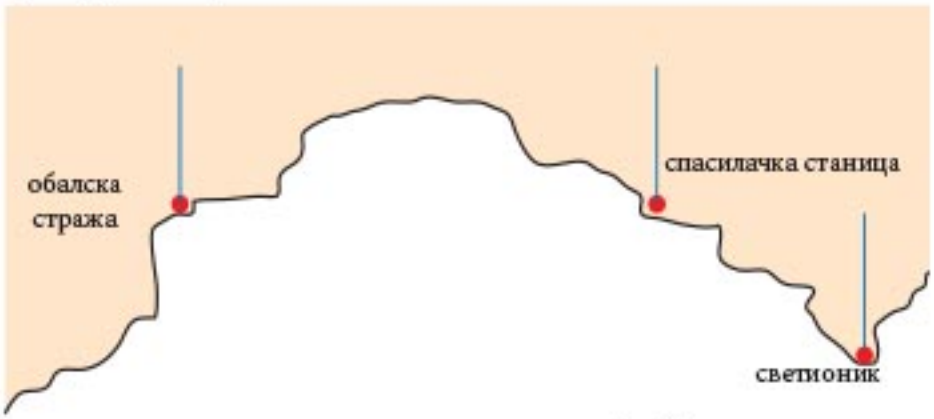
Пилот хеликоптера треба да лети од Дебра до Струмице.

г) Израчунај азимут од Струмице до Дебра.

д) Одреди растојање од Дебра до Струмице у километрима.

6. Дата мапа приказује део обале.

Прецртај мапу у свеску.



размера 1 : 20 km

Један брод у невољи послао је сигнал за опасност, који је примљен на светионику и од обалске страже.

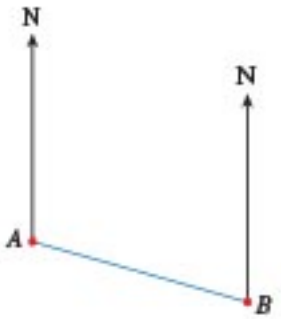
а) Брод се налази на азимуту од 135° од обалске страже.
Нацртај праву на мапи да би приказао/приказала азимут од 135° од обалске страже.

б) Брод је на азимуту од 260° од светионика.
Нацртај праву на мапи да би приказао/приказала азимут од 260° од светионика.

в) Место на ком се секу праве приказује положај (позицију) брода.
Одреди растојање од брода до спасилачке станице.

г) Колики је азимут од спасилачке станице до брода?

7. На цртежу су приказане две тачке A и B, заједно са северним правама.



а) Израчунај азимут за *B* од A.

б) Без мерења угла код *B*, израчунај азимут за *A* од *B*.
Ово је познато као обратни азимут.

Две северне праве су паралелне. Примени своје знање о паралелним правим да израчунаш азимут.

Азимут и обратни азимут се увек разликују за 180°.

Ако је један азимут мањи од 180°, онда додај 180° да одредиш обратни азимут.

в) Израчунај обратни азимут за дате азимуте.

i 065° **ii** 154° **iii** 217° **iv** 300° **v** 270°

8.7 Питагорина теорема

Питагора је био грчки математичар који је живео пре око 2500 година.

Он се бавио правоуглим троугловима.

И пре њега је било познато да сваки троугао чије странице имају размеру 3 : 4 : 5 јесте правоугли троугао.

Вавилонци, Кинези и Египћани су користили троуглове чије су странице 3, 4 и 5 мерних јединица како би били сигурни да су углови њихових објеката прави углови.



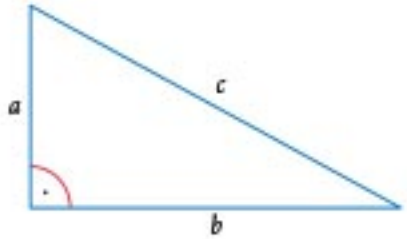
Теорема која носи име Питагоре је једна од најпознатијих теорема у математици.

Она се односи на правоугле троуглове.

Означавамо странице *a*, *b* и *c* правоуглог троугла.

Страница *c* је **хипотенуза** и она је најдужа страница троугла.

Хипотенуза је страница која се налази наспрам правог угла.



Питагорина теорема гласи:

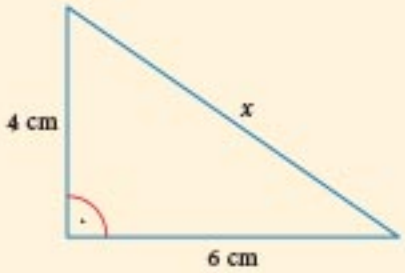
$$a^2 + b^2 = c^2$$

или речима: „Квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над катетама".

Формула се може применити само ако су три странице дате у истим мерним јединицама.

Пример 1

Израчунај дужину странице x.



Прво проверавамо која је страница хипотенуза.

Страница x је хипотенуза. Две краће странице су дугачке 4 cm и 6 cm.

Примењујемо Питагорину теорему:

$a^2 + b^2 = x^2$	Записујемо Питагорину теорему за троугао.
$4^2 + 6^2 = x^2$	Мењамо a и b вредностима 4 и 6.
$16 + 36 = x^2$	Израчунавамо 4^2 и 6^2.
$52 = x^2$	
$x = \sqrt{52}$	Кореновање је инверзна операција квадрирању.
$x = 7{,}21$ cm (на 2 д.м.)	Решење записујемо користећи одговарајући степен тачности.

Пример 2

Израчунај дужину стране h.

Решење заокругли на 1 децимално место.



Хипотенуза је 11 cm, а остале две странице су 6 cm и h.

Примењујемо Питагорину теорему:

$a^2 + b^2 = c^2$ — Записујемо Питагорину теорему за троугао.

$6^2 + h^2 = 11^2$ — Замењујемо a и c вредностима 6 и 11.

$h^2 = 11^2 - 6^2$ — Одузимамо 6^2 са обе стране.

$h^2 = 121 - 36$ — Израчунавамо 11^2 и 6^2.

$h^2 = 85$

$h = \sqrt{85}$

$h = 9{,}2$ (на 1 д.м.) — Заокругљујемо на једно децимално место.

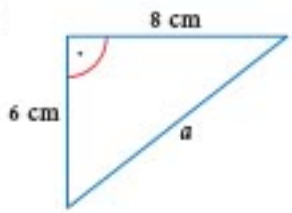
На крају разматрамо добијено решење и затим га проверавамо. У овом случају 9,2 је мање од 11, па то решење је добро решење.

Задаци

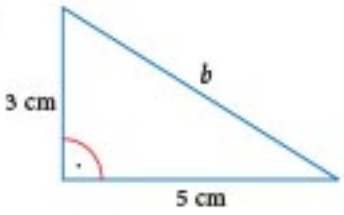
Тамо где је неопходно, решење заокругли на 3 значајне цифре, ако није другачије наведено у задацима.

1. Израчунај дужине страница означене словима.

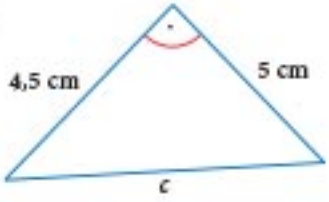
а)



б)

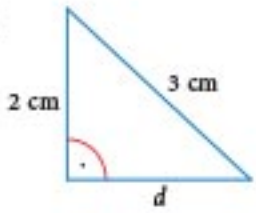


в)

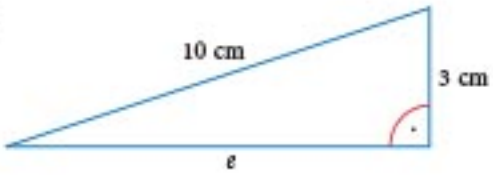


2. Израчунај дужине страница означене словима.

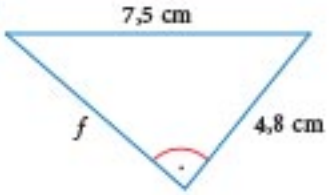
а)



б)

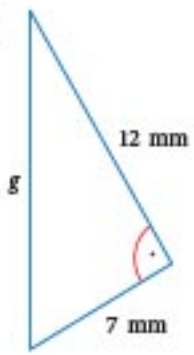


в)

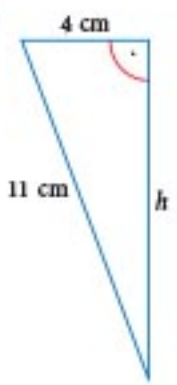


3. Израчунај дужине страница означене словима.

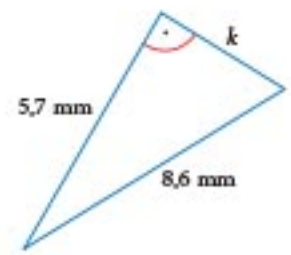
а)



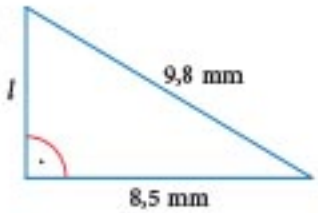
б)



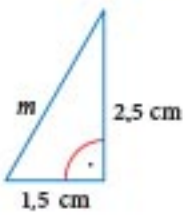
в)



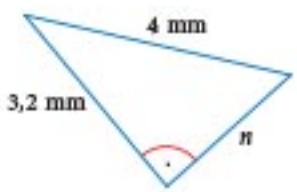
г)



д)



ђ)

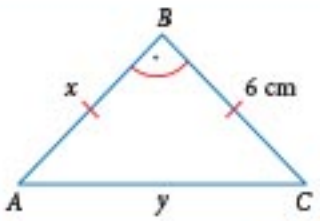


4. ABC је једнакокраки правоугли троугао.

$\overline{BC} = 6$ cm

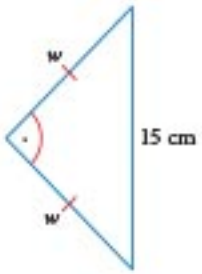
а) Израчунај дужину странице означене са x.

б) Израчунај дужину странице означене са y.



5. На цртежу је приказан правоугли једнакокраки троугао.

Израчунај дужину странице означене са w.



Прво запиши једначину у којој се w појављује као променљива.

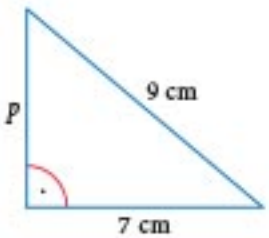
6. Лука је покушао да Питагорином теоремом пронађе дужину означену са p на датом троуглу.

$7^2 + 9^2 = p^2$

$49 + 81 = p^2$

$130 = p^2$

$p = \sqrt{130} = 11{,}4$ cm (на 1 д.м.)



а) Зашто одмах можеш рећи да је ово решење погрешно?

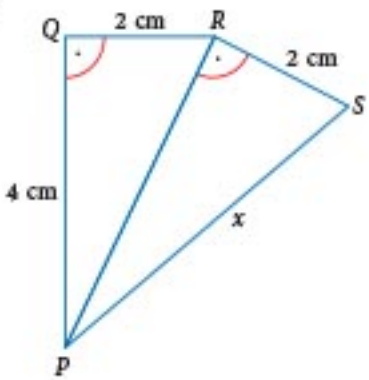
б) Израчунај тачно решење.

Размотри дужине страница. Да ли је ово решење, добро решење?

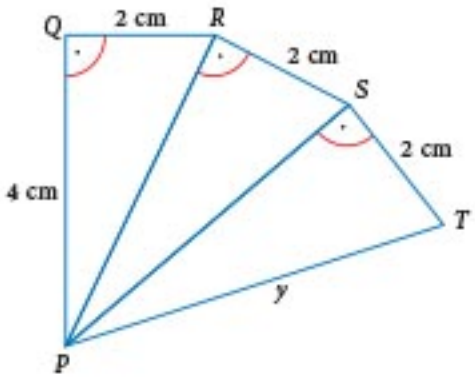
7. Спирале се могу формирати надовезивањем правоугли троуглова у низ.

Израчунај дужине страница означених са x и y на цртежима.

а)



б)



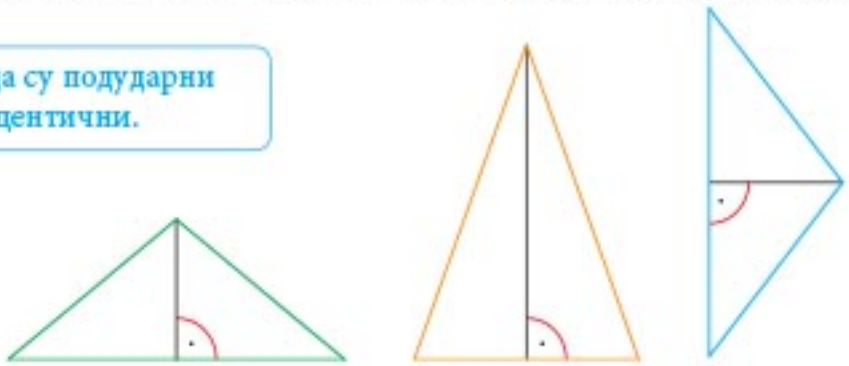
Прво треба да израчунаш трећу страницу првог троугла с леве стране.

8.8 Примена Питагорине теореме

Једнакокраки троуглови

Једнакокраки троугао можемо да саставимо од два подударна правоугла троугла.

Подсети се да су подударни троуглови идентични.



На тај начин можемо да применимо Питагорину теорему код једнакокраких троуглова.

Пример 1

ABC је једнакокраки троугао са $\overline{AB} = \overline{AC}$.

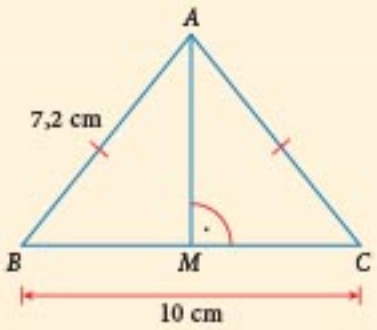
AM је права нормална на BC.

$\overline{AB} = 7{,}2$ cm и $\overline{BC} = 10$ cm.

а) Израчунај дужину за $\overline{AM}$.

б) Израчунај површину троугла ABC.

Решење заокругли на три значајне цифре.



а) Скицирај један правоугли троугао.

На пример, троугао ABM.

$\overline{BM} = 5$ cm зато што је његова дужина половина дужине основице $\overline{BC}$.

Хипотенуза троугла је 7,2 cm.

Нека $\overline{AM} = x$.

Примењујемо Питагорину теорему:

$5^2 + x^2 = 7{,}2^2$

$x^2 = 7{,}2^2 - 5^2$

$x^2 = 26{,}84$

$x = \sqrt{26{,}84} = 5{,}18$ cm (на 3 з.ц.)

Дужина $\overline{AM} = 5{,}18$ cm (на 3 з.ц.)



б) Површина троугла $= \frac{1}{2} \cdot$ основица $\cdot$ висина

Површина троугла $ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5{,}1807\ldots$

$= 25{,}9$ cm^2 (на 3 з.ц.)

Под б) немој да користиш вредност решења под а) заокругљену на 3 значајне цифре. Користи бар 4 значајне цифре при израчунавањима да се не умањи тачност.

Ако на твом калкулатору постоји дугме Ans, онда можеш да помножиш $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot$ Ans.

Примена Питагорине теореме

Постоје многи задаци који се могу решити применом Питагорине теореме.

На пример, мердевине постављене на хоризонталној подлози и наслоњене на вертикалан зид формирају правоугли троугао заједно са зидом и хоризонталном подлогом.



Када решавамо задатке, треба да нацртамо одговарајући цртеж да бисмо видели како су постављени задати елементи и како је формиран правоугли троугао.
Решење треба да прикажемо са одређеним степеном тачности.

Пример 2

Мердевине су постављене на хоризонталној подлози и горњим делом су наслоњене на вертикални зид.

Мердевине су дугачке 5 метара.

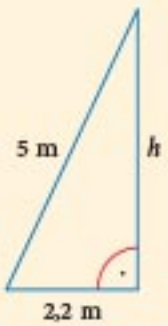
Основа мердевина је удаљена 2,2 метра од зида.

Коју висину достиже горњи део мердевина који је наслоњен на зид?

Прво цртамо цртеж да бисмо видели како су постављени потребни елементи.

На цртежу је приказан правоугли троугао.

Хипотенуза је дугачка 5 метара.



Са Питагорином теоремом:

$2{,}2^2 + h^2 = 5^2$

$h^2 = 5^2 - 2{,}2^2$ Одузимамо $2{,}2^2$ са обе стране.

$h^2 = 20{,}16$

$h = \sqrt{20{,}16} = 4{,}49$ m (на 2 д.м.) Заокругљујемо на 2 децимална места.

Мердевине досежу висину од 4,49 метара.

Пример 3

Један хеликоптер је полетео са аеродрома и летео 120 километара ка северу.

Затим је летео 45 километара према истоку.

Колико је хеликоптер сада удаљен од аеродрдома?

Прво цртамо цртеж да бисмо видели како су постављени елементи.

Означавамо трећу страницу x троугла.

На цртежу је приказан правоугли троугао са хипотенузом x.

Примењујемо Питагорину теорему:

$45^2 + 120^2 = x^2$

$16425 = x^2$

$x = \sqrt{16425} = 128{,}2$ km (на 1 д.м.) Заокругли на 1 д. м.



Хеликоптер је сада удаљен 128,2 километра од аеродрома.

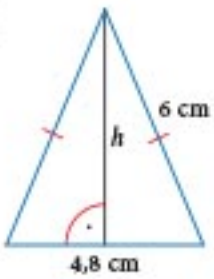
Задаци

У задацима од **1** до **3** решење заокругли на 3 значајне цифре тамо где је неопходно.

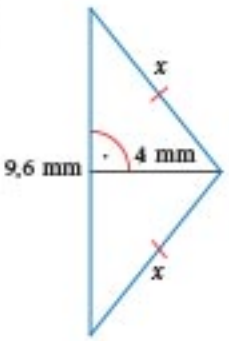
У задацима од **4** до **10** одреди степен тачности ако није дат у задатку.

1. Израчунај дужине дужи које су означене словима код следећих једнакостраничних троуглова.

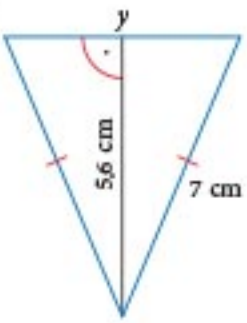
а)



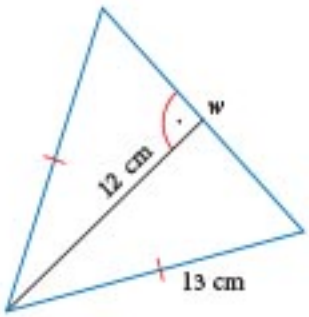
б)



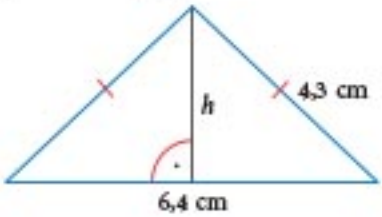
в)



г)



2. На цртежу је дат једнакостранични троугао.

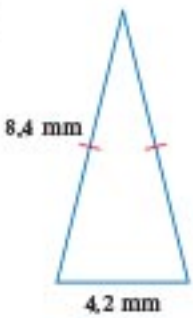


а) Израчунај висину h.

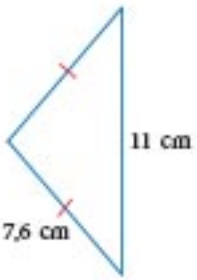
б) Израчунај површину троугла.

3. Израчунај површину сваког једнакостраничног троугла.

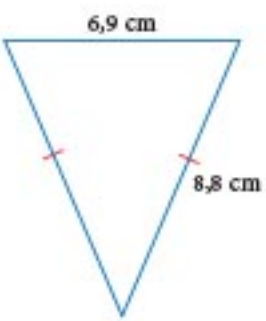
а)



б)



в)



4. Брод плови 60 километара на југ и затим 48 километара на запад.

Колико је растојање брода од почетне тачке?

5. Мердевине су постављене на хоризонталној подлози и горњим делом су наслоњене на вертикални зид.

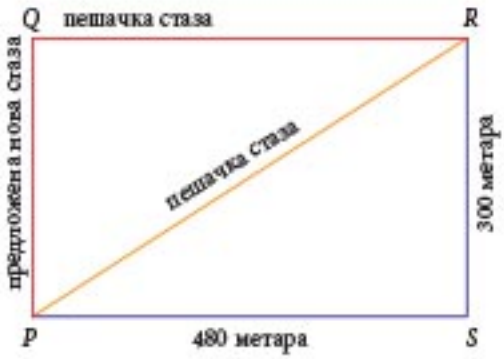
Мердевине су дугачке 6 метара.

Горњи део мердевина, који је наслоњен на зид, достиже висину од 5,35 метара на вертикалном зиду.

Колико су удаљене основе мердевина од зида?

Решење заокругли на најближи центиметар.

6. Приказана је скица једне њиве.



Постоји пешачка стаза која пролази дијагонално кроз њиву од P до R.

а) Израчунај дужину дијагоналне пешачке стазе.

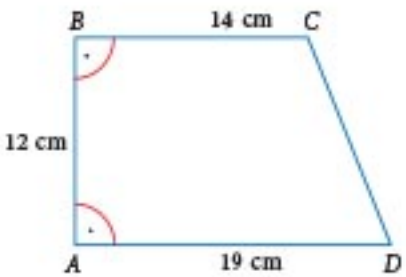
Власник њиве хоће да премести пешачку стазу по рубу њиве, од P преко Q до R.

б) Колико ће бити дужа планирана нова стаза у односу на дијагоналну стазу?

7. На цртежу је приказан трапез $ABCD$. $\overline{BC}$ је паралелна са $\overline{AD}$.

$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 90°$.

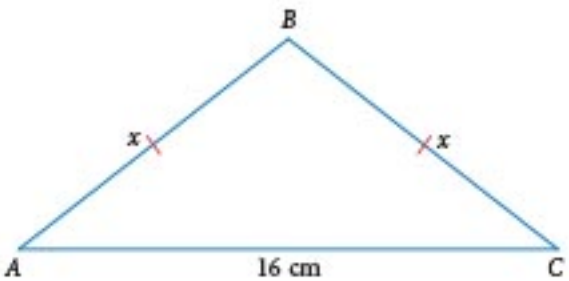
Израчунај дужину за $\overline{CD}$.



Нацртај нормалну дуж од C до $\overline{AD}$ да добијеш правоугли троугао

8. На цртежу је приказан једнакокраки троугао.

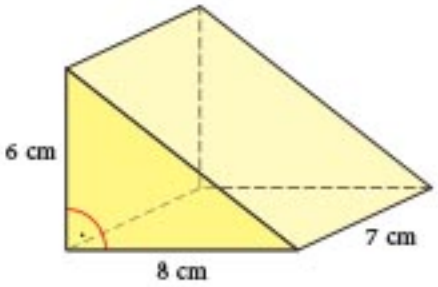
Површина троугла је 72 cm².



Израчунај дужину странице означене са x.

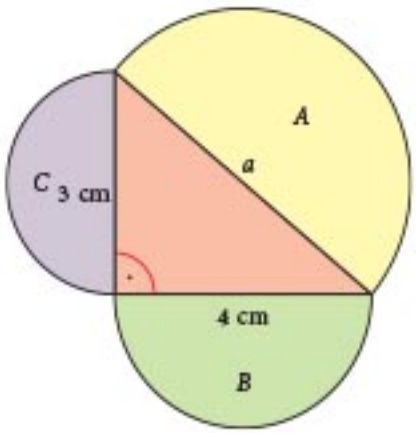
Прво израчунај висину.

9. Израчунај површину призме.



Израчунај површину троугла користећи формулу
површина $= \frac{1}{2} \cdot$ основа $\cdot$ висина

10. На цртежу су приказани правоугли троугао и по једна полукружница на свакој његовој страници.



а) Израчунај дужину хипотенузе a.

б) Израчунај површину полукруга C.

Решење заокругли на три децимална места.

в) Израчунај површину полукруга B.

Решење заокругли на три децимална места.

г) Израчунај површину полукруга A.

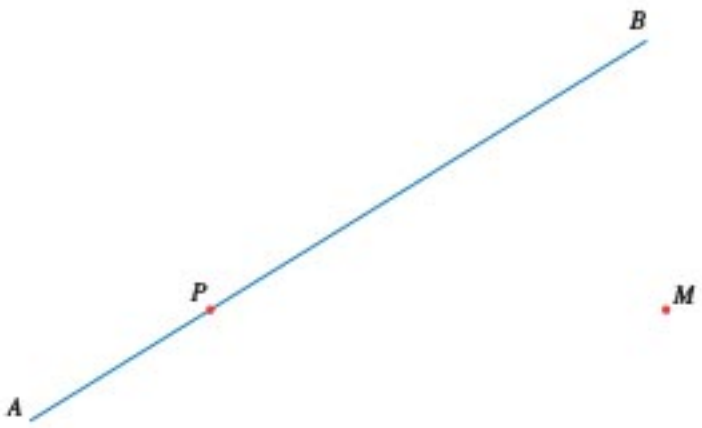
Решење заокругли на три децимална места.

д) Сабери површине два мања полукруга.

Шта примећујеш?

Задаци за понављање

1. Цртеж прецртај у свеску.



а) Нацртај праву кроз P која је нормална на AB.

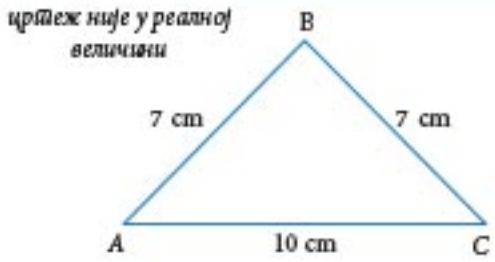
б) Нацртај праву кроз M која ће са новом правом формирати угао од 90°.

2. **а)** Конструиши троугао ABC као што је приказано на цртежу.

б) Нацртај праву кроз B која сече $\overline{AC}$ под правим углом.

в) Измери висину троугла.

г) Израчунај површину троугла.



3. На цртежу је приказан врт у облику троугла ABC.

Нацртан је у размери 1 cm : 2 m.

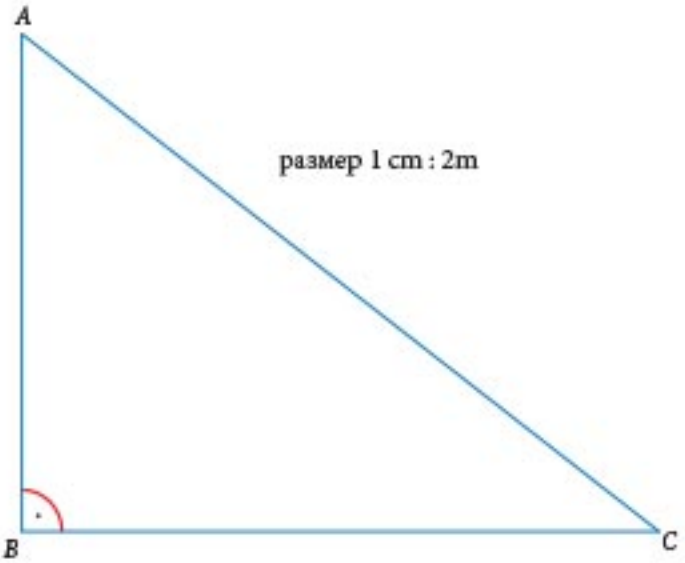
а) Прецртај цртеж у свеску.

Треба да се посади дрво удаљено 8 метара од A и 6 метара од $\overline{BC}$.

б) Нацртај геометријско место тачака које су удаљене 8 метара од A.

в) Нацртај геометријско место на тачкама које су удаљене 6 метара од зида $\overline{BC}$.

г) Означи положај дрвета словом T.



4. **а)** Нацртај петоугао.

б) Нацртај дијагонале да поделиш петоугао на троуглове.

в) Израчунај збир унутрашњих углова петоугла.

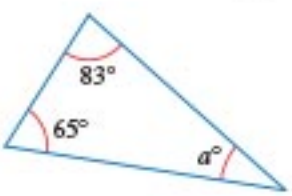
5. **а)** Запиши назив који се у математици користи за фигуру на цртежу.

б) Израчунај збир унутрашњих углова дате фигуре.

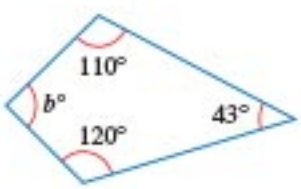
в) Користи резултат добијен под **б)** да израчунаш величину угла $x°$.

6. Према подацима на цртежима, израчунај величине углова означених словима.

а)



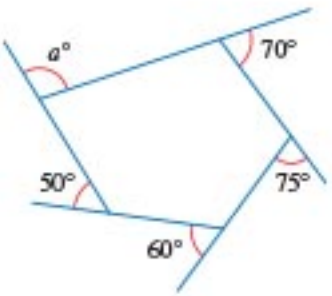
б)



7. **а)** Препиши и допуни тврдњу:

Збир спољашњих углова у многоуглу је _____.

б) Израчунај величину угла $a°$ према подацима на цртежу.



8. Приказана су четири многоугла.

А) 

Б) 

В) 

Г) 

Препиши и допуни словима многоуглове како би тврдње биле тачне:

а) _____ и _____ су петоуглови.

б) _____ и _____ су неконвексни многоуглови.

в) _____ и _____ су правилни многоуглови.

г) _____ и _____ су шестоуглови.

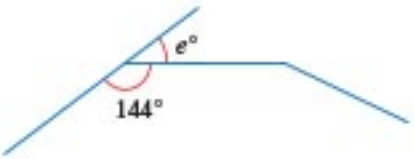
9. Запиши математички назив за правилан четвороугао.

10. Израчунај величину спољашњег угла многоугла са:

а) 6 страница **б)** 9 страница **в)** 12 страница **г)** 24 странице.

11. Израчунај величину унутрашњег угла многоугла из претходног задатка.

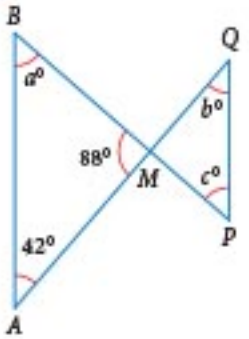
12. На цртежу је приказан део правилног многоугла.



а) Израчунај величину угла e°.

б) Колико страница има цео многоугао?

13. На цртежу је AB паралелна са PQ.



Израчунај величину за:

а) $\sphericalangle ABM$

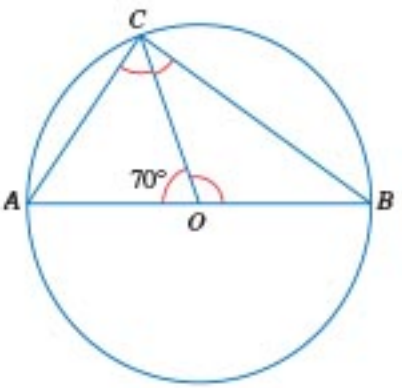
б) $\sphericalangle PQM$

в) $\sphericalangle MPQ$.

14. A, B и C су тачке кружнице.

O је центар кружнице.

$\sphericalangle AOC = 70^\circ$



а) У коју врсту спада троугао AOC?

б) Израчунај величину угла ACO.

в) Одреди величину угла COB.

г) Одреди величину угла BCO.

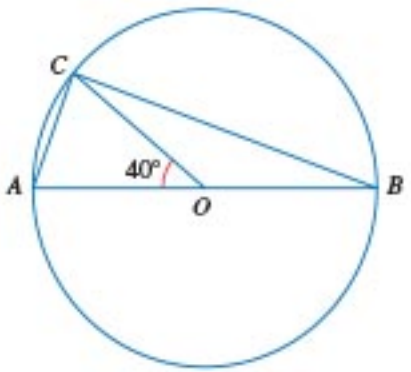
д) Одреди величину угла ACB.

15. На цртежу је приказана кружница као она из претходног задатка.

У овом случају, угао $AOC = 40°$.

Користећи овај цртеж, поново одговори на захтеве од **а)** до **д)** из претходног задатка.

Шта примећујеш за угао ACB у овом случају?



Овај задатак је пример за једно опште правило:
Ако троугао ABC има темена једне кружнице и AB је пречник кружнице, онда је угао ACB прави угао.

16. Израчунај унутрашњи угао правилног десетоугла.

Објасни зашто није могуће да се нацрта правилна тесалација од десетоугла.

17. **а)** Нацртај кружницу чији је полупречник 5 cm.

б) Конструиши правилан осмоугао уписан у кружницу.

18. Користи лењир и шестар да би конструисао/конструисала дату 2Д-форму.



19. Запиши у облику размере:

а) 1 cm одговара 10 km **б)** 1 cm одговара 250 m **в)** 2 cm одговара 1 km

20. Дата је размера на карти, 1 : 400000.

Колико је растојање представљено са 1 cm?

21. Мапа на слици приказује једно острво.



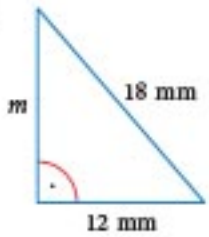
а) Израчунај растојање и азимут од Града Б до Града А.

б) Израчунај растојање и азимут од Града В до Града Б.

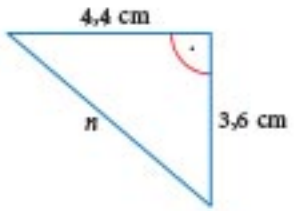
У следећим задацима решење заокругли на 3 значајне цифре, ако није другачије наглашено у задатку.

22. Израчунај дужине назначене словима код следећих правоуглих троуглова.

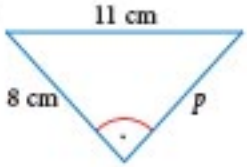
а)



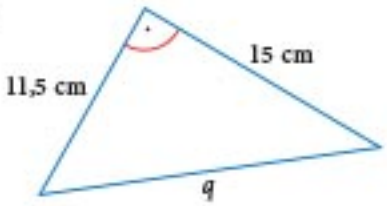
б)



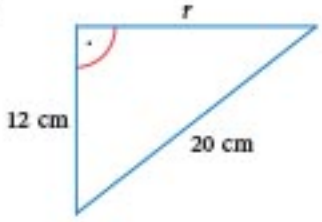
в)



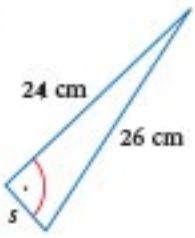
г)



д)

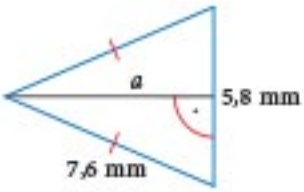


ђ)

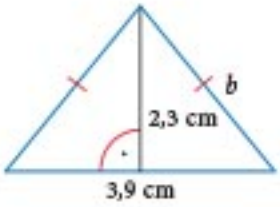


23. Израчунај дужине означене словима код следећих једнакокраких троуглова.

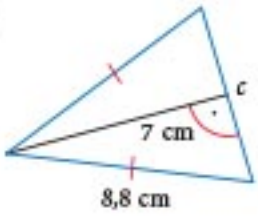
а)



б)

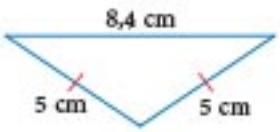


в)

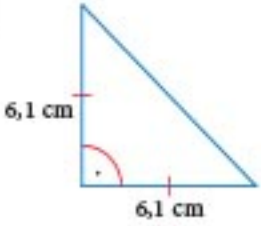


24. Израчунај површине следећих једнакокраких троуглова.

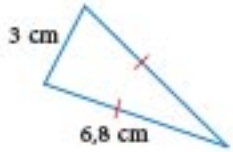
а)



б)



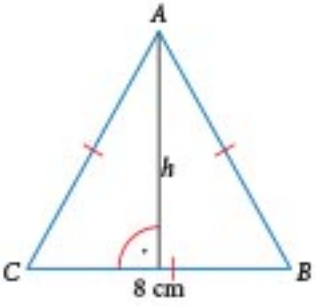
в)



25. ABC је једнакостранични троугао.

а) Израчунај висину h.

б) Израчунај површину троугла ABC.

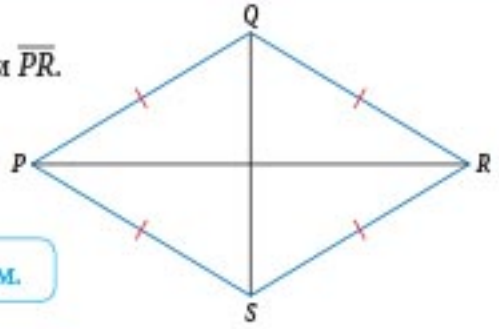


26. $PQRS$ је ромб.

На цртежу су нацртане његове дијагонале $\overline{QS}$ и $\overline{PR}$.

$\overline{QS} = 8$ cm и $\overline{PR} = 12$ cm.

Израчунај дужину странице ромба.



Дијагонале ромба се секу под правим углом.

27. Један брод плови 75 километара на север, а затим 150 километара на запад.

Колика је његова удаљеност од почетног места?

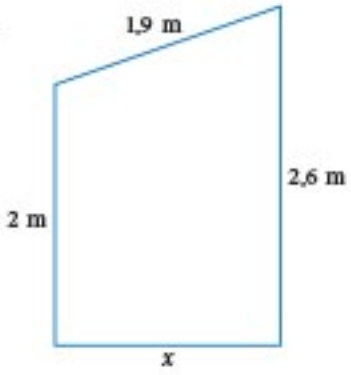
28. На цртежу је приказана бочна пројекција шупе у башти.

Шупа је висока 2,6 метара напред и 2 метара назад.

Коса ивица крова је дугачка 1,9 метара.

Израчунај ширину шупе, означену на цртежу словом x.

Резултат заокругли на најближи центиметар.



29. Један брод плови 154 километара на север, а затим 76 километара на исток, па 87 километара на југ.

Колика је његова удаљеност од почетног места?

Резултат заокругли на најближи километар.

9 Мерење и решавање проблема

Наставни циљеви

- Решавање проблема повезаних са просечном брзином.
- Изражавање променљивих преко других променљивих у датој једначини; извођење једноставних формула; коришћење математичких и формула из других предмета.
- Заокругљивање бројева до одређеног броја децималних места; заокругљивање користи да би дошао до решења проблема уз одређени степен тачности.
- Решавање проблема у вези са мерењем у различитим контекстима.
- Коришћење мере различитих мерних јединица за прављење поређења у свакодневном контексту, на пример, графика за путовање и вредност новца.
- Прецизно идентификовање, организација, представљање и тумачење информације у писменој форми, табеларно, графички и дијаграмом.
- Израчунавање дужине дужи, површине и запремине правоугаоних призми и ваљака.

9.1 Средња брзина

Брже од брзине звука

У децембру 1898. године, постављен је први светски рекорд у брзини вожње на Земљи.

Гастон де Часелуп-Лубат из Француске постао је први светски рекордер.

Победио је брзином од 63,15 km/h.

Скоро 100 година касније, 1997. године, у пустињи Блек Рок у САД постигнута је рекордна брзина од 1227,986 km/h.

Први пут се једно возило на Земљи кретало брзином већом од брзине звука.



Константна брзина

Брзина је једна од величина којима можемо да опишемо кретање.

Када се крећемо константном брзином, пређени пут је директно пропорционалан времену.

Задатке који се односе на брзину можемо да решимо помоћу пропорције.

Пример 1

Један аутомобил се креће константном брзином.

Он је прешао 165 km за 3 сата.

Израчунај брзину аутомобила у km/h.

Брзина у km/h означава пређени пут за 1 сат.

За 3 сата аутомобил је прешао 165 km.

За 1 сат аутомобил је прешао 165 : 3 = 55 km. Делимо са 3 да бисмо пронашли пређени пут за 1 сат.

Брзина је 55 km/h.

Решавамо на исти начин као код јединичне методе за директну пропорцију.

Средња брзина

Из претходног примера можемо да видимо да је веза између брзине, пута и времена:

$$\text{брзина} = \frac{\text{пут}}{\text{време}}$$

Међутим, људи ретко путују константном брзином.

Зато користимо **средњу брзину**, коју израчунавамо за цели пређени пут.

$$\text{средња брзина} = \frac{\text{укупни пређени пут}}{\text{укупно време}}$$

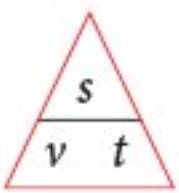
Ако узмемо да брзина v = средња брзина, s = укупни пређени пут, t = укупно време да би се прешао цели пут, онда је формула:

$$v = \frac{s}{t}$$

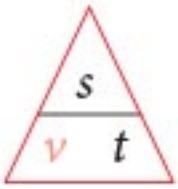
Из ове формуле можемо одредити s или t. Две нове формуле су:

$$s = v \cdot t \quad \text{и} \quad t = \frac{s}{v}$$

Троугао може да нам помогне да упамтимо формулу.



Да бисмо пронашли формулу за брзину, покривамо слово v.



Троугао сада приказује $\frac{s}{t}$. То значи да $v = \frac{s}{t}$

Ако покријемо слово t, троугао приказује $\frac{s}{v}$, па $t = \frac{s}{v}$

Ако покријемо слово s, троугао приказује vt, па $s = vt$.

$s = vt$ је исто као $s = v \cdot t$.

Пример 2

Једном аутомобилу – играчки потребно је 12 секунди да би прешао 96 cm.

Израчунај његову средњу брзину у cm/s.

Протекло време $t = 12$ и пређени пут је $s = 96$

Формулом, добијамо: $v = \frac{s}{t}$

$v = \frac{96}{12}$

$= 8$

Средња брзина је 8 cm/s.

Претварање часова у минуте и обратно

Времена 3 часа и 30 минута, 3,5 часова и $3\frac{1}{2}$ су једнака.

Понекад је потребно да извршимо претварања.

До сада смо научили да претварамо разломке у децималне бројеве и децималне бројеве у разломке.

Да бисмо претворили минуте у часове, делимо са 60.

Да бисмо претворили часове у минуте, множимо са 60.

Множимо или делимо само децимални део или минутни део времена. Цели број часова остаје исти.

Пример 3

а) Претвори 1 h 18 min у децимални број.

б) Претвори 4,7 часова у часове и минуте.

а) Цели број часова ће остати исти.

$18 \text{ минути} = \frac{18}{60} \text{ часова}$

$= 0{,}3 \text{ часова}$

Према томе, 1 h 18 min = 1,3 часа.

б) 4,7 часова је 4 часа и 0,7 часова.

$0{,}7 \text{ часова} = 0{,}7 \cdot 60 \text{ минута}$

$= 42 \text{ минута}$

4,7 часова = 4 h 42 min

Пример 4

Један воз прелази 168 km од Скопља до Ђевђелије средњом брзином од 70 km/h. Израчунај време путовања у часовима и минутима.

$s = 168$ и $v = 70$

Формулом $t = \frac{s}{v}$

$t = \frac{168}{70}$

$= 2{,}4$

Време путовања = 2,4 часа

= 2 часа и 0,4 часа

= 2 часа и 0,4 · 60 минута

= 2 часа и 24 минута

Задаци

1. Пронађи средње брзине:

а) 150 km за 3 часа. (у km/h)

б) 100 m за 10 секунди. (у m/s)

в) 2475 km за 9 часа. (у km/h)

г) 27 km за 6 часа. (у km/h)

д) 16,5 km за 3 h 18 min. (у km/h)

ђ) 23 km за 20 min. (у km/h)

2. Израчунај пређени пут, ако су дати средња брзина и време:

а) 85 km/h за 4 часа.

б) 435 km/h за 6,5 часа.

в) 23 m/s за 24 секунди.

г) 96 km/h за $3\frac{1}{2}$ часа.

д) 75 cm/s за 0,8 секунди

ђ) 125 km/h за 4 h 54 min.

3. Израчунај време потребно да би се прешло:

а) 150 km са 75 km/h.

б) 160 km са 64 km/h

в) 84 m са 28 m/s

г) 22,5 km са 3,75 km/h

д) 3750 km са 600 km/h

ђ) 19 km са 4 km/h

4. Један воз прелази 130 km за $2\frac{1}{2}$ часа. Израчунај његову средњу брзину.

5. Растојање од Лондона до Мадрида је 1260 km.

Авион лети од Лондона до Мадрида за 2 h 15 min.

Израчунај средњу брзину авиона.

6. Јана је возила бицикл и прешла пут од 27,3 km средњом брзином од 6,5 km/h.

Израчунај, у сатима и минутима, за колико времена је прешла овај пут.

7. Бициклиста је прешао пут од 209 km за 43 часа и 48 минута.

Одреди његову просечну брзину вожње.

8. Један авион се 2 сата и 24 минута креће брзином од 360 km/h.

Израчунај колико ће километара прећи за ово време.

9. Аутомобил се креће брзином од 84 km/h за време од $1\frac{1}{2}$ часа, а затим се креће 2 сата брзином од 66 km/h.

Израчунај укупни пут који је прешао аутомобил.

Прво израчунај укупно растојање и укупно време.

10. Воз је прешао пут од 144 km брзином од 80 km/h и затим још 130 km брзином од 50 km/h.

Израчунај средњу брзину којом се кретао воз.

11. Аутомобил и бициклиста крећу истовремено са истог места.

Крећу се истим путем за време од $3\frac{1}{2}$ часа.

Средња брзина аутомобила је 56 km/h, а средња брзина бициклисте је 16 km/h.

Израчунај растојање између њих после $3\frac{1}{2}$ часа.

Израчунај колики пут је прешао свако од њих.

12. Матеј иде пешке 12 km од своје куће до куће његовог друга, средњом брзином од 6 km/h.

Његова просечна брзина до куће његовог друга и назад износи 4 km/h.

Колико сати му је потребно да се врати кући пешке?

Прво, израчунај време потребно да стигне до куће његовог друга. Затим израчунај укупно време до куће његовог друга и натраг до његове куће.

9.2 Изведене мерне јединице

Изведена мерна јединица је она мера која укључује мерне јединице две различите величине.

Средња брзина је пример за изведену мерну јединицу зато што она изражава пут пређен за одређено време.

Други примери за изведене мерне јединице:

- притисак измерен у Њутнима по квадратном центиметру.
- проток течности измерен у литрима у секунди.
- цена робе, измерена у денарима за грам или у денарима за литар.

Постоји и много других примера.

У много изведених мерних јединица употребљавамо реч „за“, „у“ или „на“.

То показује да се једна величина дели са другом величином.

Пример 1



Детерџент се продаје у две различите флаше.

Детерџент А садржи 1,6 литара и кошта 288 денара.

Детерџент Б садржи 3 литра и кошта 495 денара.

Израчунај шта је повољније, да се купи детерџент А или детерџент Б?

У израчунавањима, одговоре ћемо заокругљивати на 4 децимална места.

Први начин: Проналазимо нижу цену за један литар.

Детерџент А се продаје по цени од 288 денара за 1,6 литара.

Цена за 1 литар = 288 : 1,6 = 180

Цена 1 литра детерџента А је 180 денара.

Детерџент Б се продаје по цени од 495 денара за 3 литра.

Цена за 1 литар = 495 : 3 = 165

Цена 1 литра детерџента В је 165 денара.

Детерџент Б се продаје по 165 денара за литар, значи да је повољније купити детерџент Б.

Начин 2: Проналазимо већу количину у литрима за један денар.

1,6 литара детерџента А се продаје за 288 денара.

литара за 1 денар = 1,6 : 288 = 0, 0056 (заокругљена на 4 децимална места)

0, 0056 литара детерџента А продају се за 1 денар.

3 литара детерџента Б продају се за 495 денара.

литара за 1 денар = 3 : 495 = 0,0061 (заокругљено на 4 децимална места)

0,0061 литар детерџента Б се продаје за 1 денар.

Детерџентом Б се добија већа количина за 1 денар, што значи да је повољније купити детерџент Б.

Примена на графика

На цртежу је приказан један **график пређеног пута (пут – време)**.

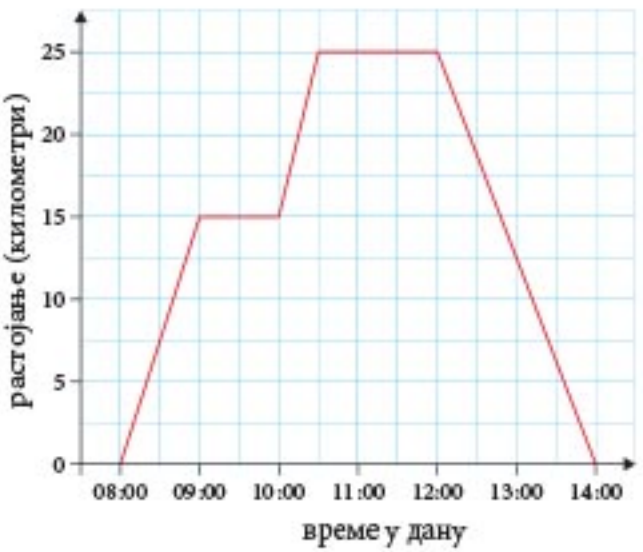
Он приказује Светланину вожњу бициклом.

Она је кренула од куће у 8:00, а вратила се у 14:00.

Са графика можемо израчунати њену брзину између 8:00 и 9:00.

Прешла је пут од 15 km за један сат. Њена брзина за то време је била 15 km/h.

Колика је била њена средња брзина?



Светлана је возила 25 km и затим се вратила назад. Укупни пређени пут је 50 km.

У току дана она се одмарала $2\frac{1}{2}$ часа, а возила је $3\frac{1}{2}$ часа.

Њена средња брзина је 50 : 3,5 = 14,29 km/h (заокругљена на 2 децимална места).

Пример 2

Петар је у новинама видео рекламу са посебним понудама две компаније за мобилну телефонију „М“ и „Т“.



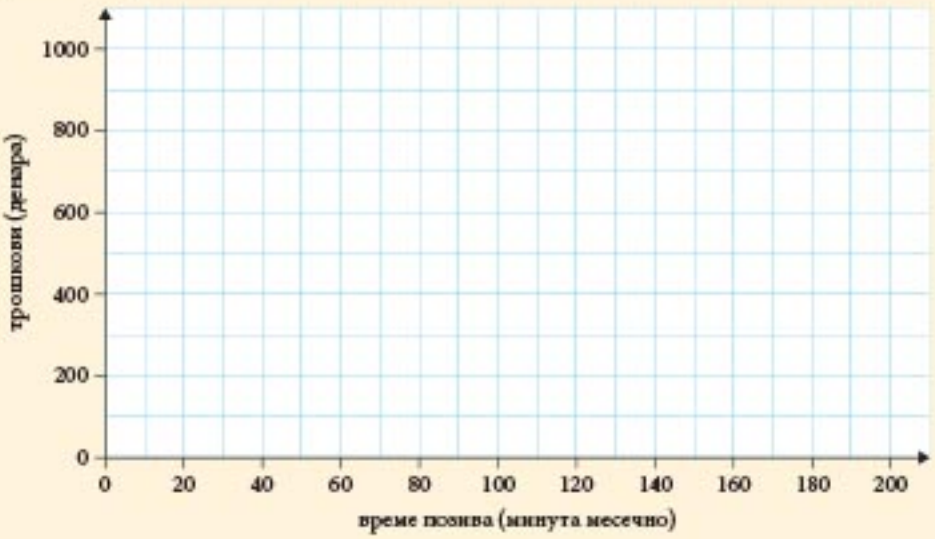
а) Прикажи обе понуде у координатном систему.

На хоризонталној оси представљамо време позива до 200 минута месечно.

На вертикалној оси представљамо трошкове до 1000 динара.

б) После колико минута месечно је повољнија понуда компаније „М“?

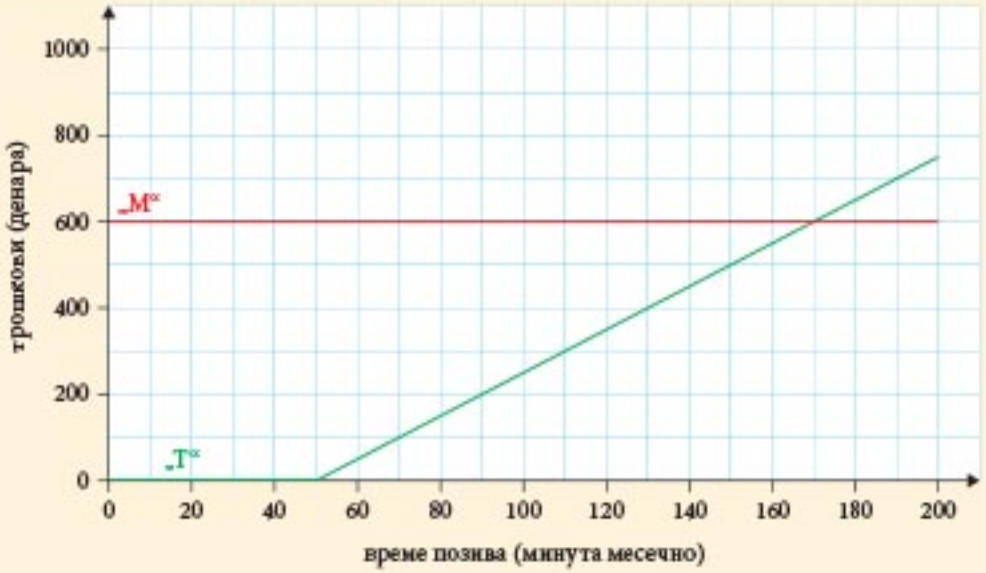
а) Да нацртамо координатни систем.



У табели су приказани трошкови сваке компаније за различити број минута месечно.

Време (минути)	0	30	60	100	150	200
Трошкови са „М“	600	600	600	600	600	600
Трошкови са „Т“	0	0	50	250	500	750

Означавамо тачке на графику и повезујемо их дужима.



б) График приказује две праве које се секу у 170 минута месечно.

Лево од ове тачке, нижа је зелена права, значи да је понуда компаније „T“ јефтинија.

Десно од ове тачке, нижа је црвена права, значи да је понуда компаније „M“ јефтинија.

Понуда компаније „M“ је повољнија ако се разговара више од 170 минута месечно.

Задаци

1. Храна за мачке се продаје у два различита паковања.



Паковање од 420 g се продаје за 63 денара, а паковање од 600 g се продаје за 99 денара.

Израчунај шта је повољније купити, мање или веће паковање.

2. Јестиво уље се продаје у три различита паковања.

500 ml кошта 159 денара

1 литар кошта 299 денара

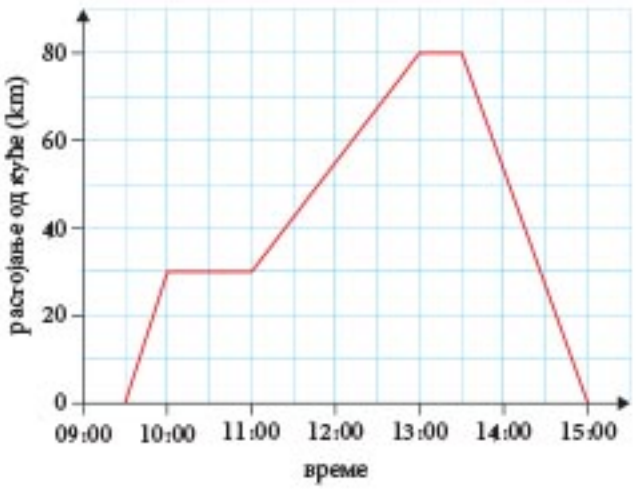
2,4 литра кошта 724 денара

Израчунај које паковање је најповољније за куповину.

Прикажи цели поступак.

3. Коста је изашао из куће у 9:30 да би посетио место које је удаљено 80 km од његовог дома.

График приказује његово кретање тог дана.



а) Израчунај његову брзину између 11:00 и 13:00.

б) У ком делу путовања се кретао најбрже? Како то можеш да одредиш?

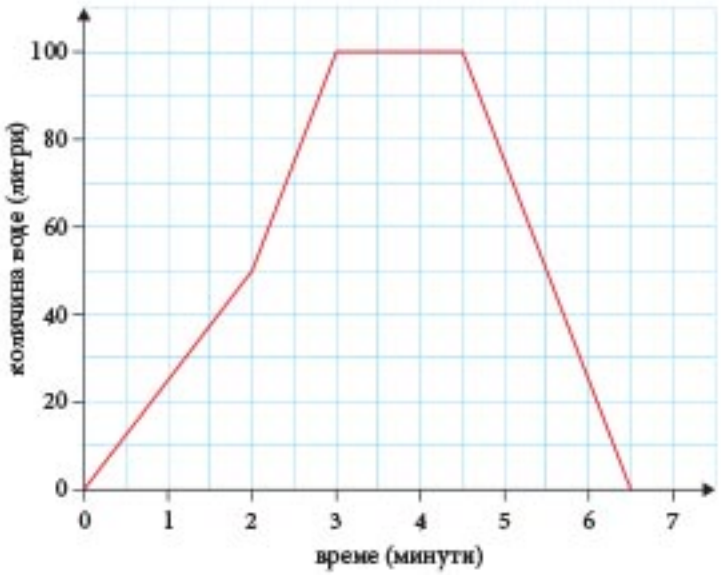
в) Израчунај његову средњу брзину за цели дан.

4. Продавница А нуди следећу специјалну понуду: 1,5 kg брашна се продаје за 46 денара.

У продавници Б, једна врећа од 25 kg истог брашна се продаје за 750 денара.

Ко продаје по повољнијој цени, продавница А или продавница Б?

5. На следећем графику је приказана количина воде у кади када се пуни и затим када се празни.



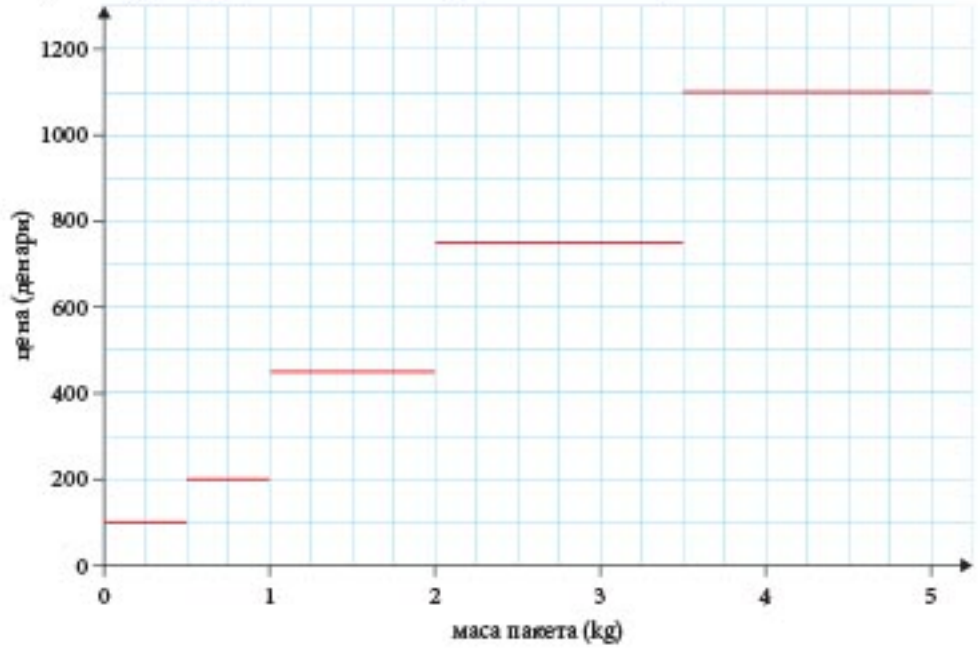
а) Колика је количина воде у кади када је пуна?

б) Којом количином воде се напунила када у прва два минута?

в) Израчунај проток у прва 2 минута у литрима у минути.

г) Израчунај проток када се када празни у литрима у минути?

6. График приказује цену слања пакета преко компаније *X*.



На графику може да се види, на пример, да се за слање пакета до 500 g плаћа 100 денара.

а) Запиши трошкове за слање пакета са следећим масама преко компаније X.

i 900 g **ii** 1,4 kg **iii** 3,4 kg **iv** 3,75 kg

Компанија Y нуди фиксну цену од 250 денара по килограму.

Слање пакета масе 3,1 kg би коштало $3{,}1 \cdot 250 = 775$ денара.

б) Израчунај трошкове за слање четири пакета под **а)** преко компаније Y.

в) За сваки пакет, запиши која је компанија јефтинија и за колико.

7. Густина тела је сложена мера релативне масе.

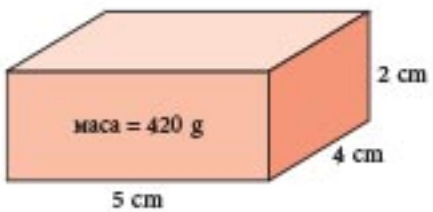
Она се израчунава дељењем масе у грамима са запремином у cm^3.

Јединица за густину је g/cm^3.

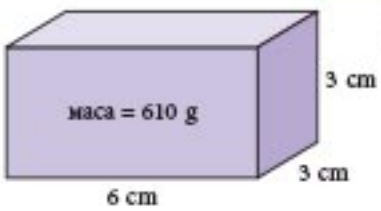
а) Израчунај густину датих квадара у g/cm^3.

запремина = дужина · ширина · висина

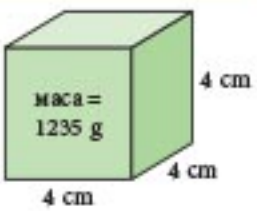
i



ii



iii



У табели су приказане густине неколико метала.

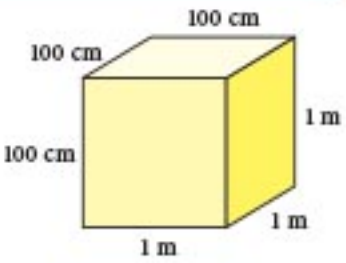
Алуминијум	Хром	Бакар	Злато	Гвожђе	Олово	Сребро	Титанијум
2,7 g/cm^3	7,15 g/cm^3	8,96 g/cm^3	19,3 g/cm^3	7,86 g/cm^3	11,3 g/cm^3	10,49 g/cm^3	4,51 g/cm^3

б) Запиши од које врсте метала је израђен сваки квадар.

Утврди који метал има густину близу решења за сваки квадар под а).

9.3 Запремина

Јединице запремине



Димензије коцке на цртежу су 1 метар, 1 метар и 1 метар.

Њена запремина је $1\ m \cdot 1\ m \cdot 1\ m = 1\ m^3$

Димензије коцке су такође и 100 cm, 100 cm и 100 cm.

Њена запремина је $100\ cm \cdot 100\ cm \cdot 100\ cm = 1000000\ cm^3$

Значи, $\mathbf{1\ m^3 = 1000\,000\ cm^3}$

Ако димензије коцке измеримо у милиметрима, запремина је $1000\ mm \cdot 1000\ mm \cdot 1000\ mm = 1000000000\ mm^3$.

Према томе, 1 милијарда кубних милиметара једнака је 1 кубном метру.

$\mathbf{1\ m^3 = 1000\,000000\ mm^3}$.

Када претварамо јединице мере за запремину, израчунавамо куб коефицијента за претварање дужине.

$1\ km = 1000\ m$

Тако, $1\ km^3 = 1000\ m \cdot 1000\ m \cdot 1000\ m = 1000\,000000\ m^3$.

Пример 1

Претвори.

а) $5{,}3\ m^3$ у cm^3 **б)** $12\ cm^3$ у mm^3 **в)** $4500000\ cm^3$ у m^3

а) $1\ m = 100\ cm$ Ово је коефицијент за претварање дужине

$1\ m^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100\ cm^3 = 1000000\ cm^3$ Ово је коефицијент за претварање запремине.

$5{,}3\ m^3 = 5{,}3 \cdot 1000000 = 5300000\ cm^3$

б) $1\ cm = 10\ mm$

$1\ cm^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000\ mm^3$

$12\ cm^3 = 12 \cdot 1000 = 12000\ mm^3$

в) $1\ m = 100\ cm$

$1\ m^3 = 100 \cdot 100 \cdot 100 = 1000000\ cm^3$

$4500000\ cm^3 = 4500000 : 1000000 = 4{,}5\ m^3$

Запремина

Запремина једне посуде је максимална количина течности коју она може да садржи.

Запремина једне посуде је величина простора који она захвата.

Посуда запремине од $1000\ cm^3$ има запремину од једног литра.

$\mathbf{1000\ cm^3 = 1000\ ml}$

$\mathbf{1\ cm^3 = 1\ ml}$

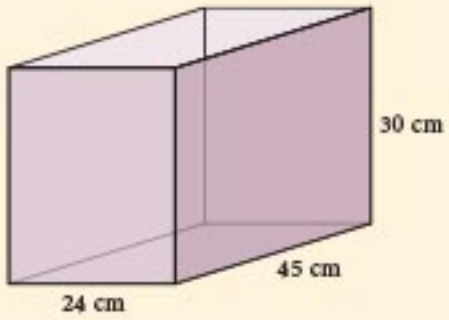
Пример 2

На слици је приказан акваријум за рибе.

Акваријум је дугачак 45 cm, широк 24 cm и дубок 30 cm.

а) Израчунај запремину у cm^3.

б) Израчунај запремину акваријума у литрима.



а) Запремина = дужина · ширина · дубина

$= 45 \cdot 24 \cdot 30$

$= 32400\ cm^3$

б) Запремина = 32400 ml

$= 32400 : 1000$

$= 32{,}4\ l$

Акваријум за рибе садржи 32,4 литра воде када је пун.

Задаци

1. Претвори у cm^3

а) $2\ m^3$ **б)** $5{,}6\ m^3$ **в)** $6000\ mm^3$ **г)** $9600\ mm^3$

2. Претвори у mm^3

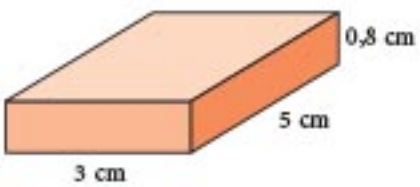
а) $3\ m^3$ **б)** $0{,}75\ m^3$ **в)** $9\ cm^3$ **г)** $1{,}4\ cm^3$

3. Претвори у m^3

а) $7000000\ cm^3$ **б)** $12500000\ cm^3$

4. **а)** Израчунај запремину квадра на цртежу, у cm^3.

б) Израчунај запремину квадра на цртежу, у mm^3.



5. Израчунај колико милилитара течности садржи квадар из задатка 4.

6. Израчунај запремину у милилитрима посуде запремине:

а) $25\ cm^3$ **б)** $125\ cm^3$ **в)** $2500\ cm^3$ **г)** $8000\ mm^3$

7. Весна има врећу која садржи $1500\ cm^3$ хране за птице.

Она планира да спакује храну у мале кутије димензија 6 cm, 4 cm и 15 mm.

а) Израчунај запремину једне мале кутије.

б) Колико малих кутија може да се напуни из вреће?

в) Колико ће хране остати у врећи?

Води рачуна о различитим јединицама мере.

8. Кире има 40 кутија сока.

Свака кутија има димензије 4 cm, 5 cm и 5 cm.

а) Израчунај запремину једне кутије у cm^3.

б) Израчунај колико укупно литара сока има Кире.

9. Чоколаде „чоко“ се продају у малим паковањима.

Свако мало паковање има димензије 15 cm, 10 cm и 4 cm.

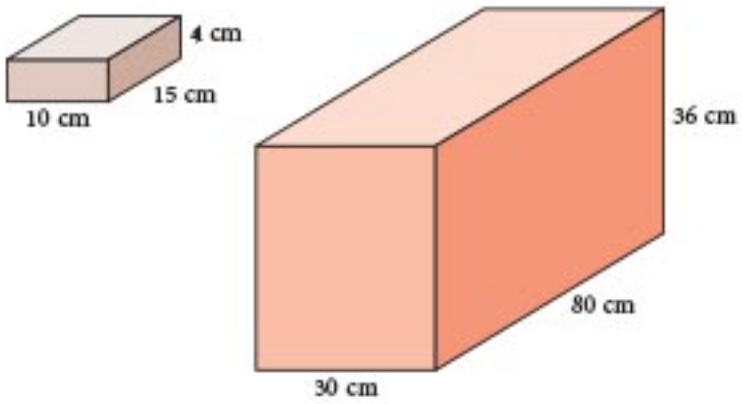
Компанија која их производи хоће да пакује чоколаде у велике кутије.

Свака велика кутија има димензије 80 cm, 30 cm и 36 cm.

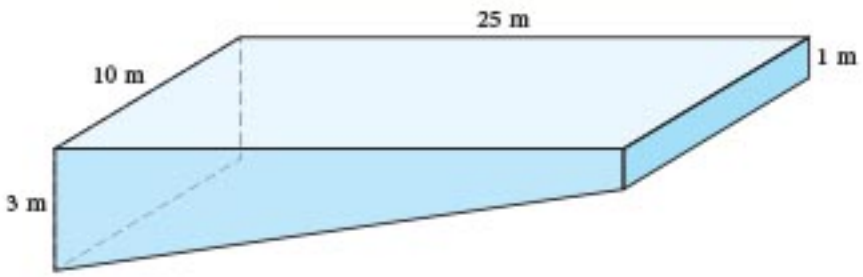
Организуј распоред чоколада у великој кутији тако да нема празнина између њих.

а) Израчунај колико паковања чоколаде „чоко“ садржи велика кутија.

б) Нацртај дијаграм да би приказао/приказала како треба да се пакују чоколаде.



10. На цртежу је приказан базен дугачак 25 метара.



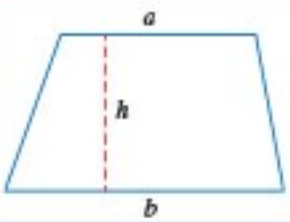
Базен је дубок 1 метар у плитком делу и 3 метра у дубоком делу.

Бочни зид је трапез.

а) Израчунај површину бочног зида у m^2.

Базен је широк 10 метара.

б) Израчунај запремину базена у m^3.



Формула за површину трапеза је $P = \frac{1}{2}(a + b)\,h$

в) Израчунај запремину базена у литрима.

Упамти да је 1 литар = 1000 cm^3.

9.4 Призма и ваљак

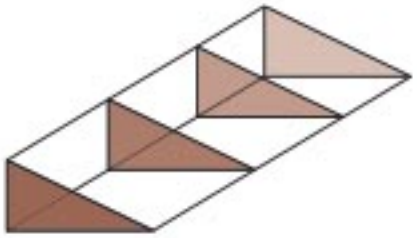
Запремина призме

Призма је 3Д-форма.

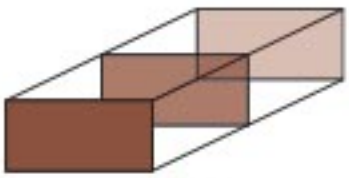
Попречни пресеци целом дужином призме су једнаки.

На цртежу је приказана призма са основом троугла.

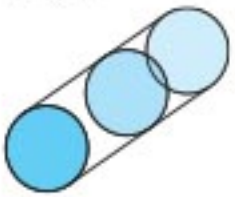
Сви троугласти попречни пресеци призме су подударни троуглови.



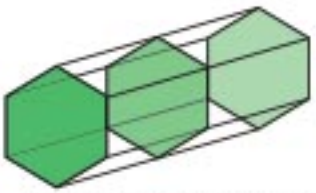
На цртежима су приказана још три 3Д-форме.



квадар
(призма са основом правоугаоника)



ваљак
(тело са основом круга)



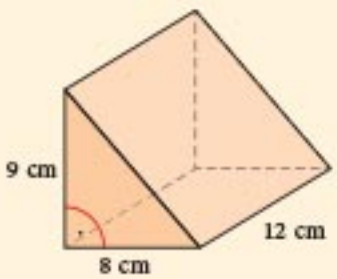
призма са основом шестоугла

Формула за израчунавање запремине призме и ваљка је:

запремина призме/ваљка = површина попречног пресека · дужина

Пример 1

Израчунај запремину призме са основом правоуглог троугла.



Прво израчунавамо површину попречног пресека.

површина троугла = ½ · основа · одговарајућа висина

$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36\ \text{cm}^2$

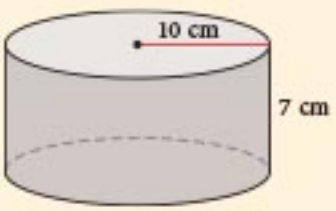
запремина призме = запремина попречног пресека · дужина.

$= 36 \cdot 12 = 432\ \text{cm}^3$

Користимо јединице мере cm^3 зато што израчунавамо запремину.

Пример 2

Израчунај запремину датог ваљка. Решење заокругли на 2 значајне цифре.



Попречни пресек ваљка је круг.

Површина круга је πr^2.

Запремина ваљка је $V = \pi r^2 h$, где r је полупречник, а h је висина ваљка.

$V = \pi r^2 h$

$= \pi \cdot 10^2 \cdot 7$

$= 2199{,}114858$ Калкулатором израчунат π.

$= 2200\ \text{cm}^3$ Заокругљено на 2 значајне цифре.

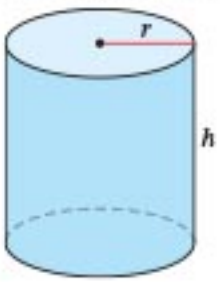
Површина 3Д-форме

Површину 3Д-форме одређујемо као збир површина свих страна те 3Д-форме.

Код призме, све стране су 2Д-форме.

Израчунавамо површине страна, а затим их сабирамо.

Да размотримо поступак за израчунавање површине ваљка.

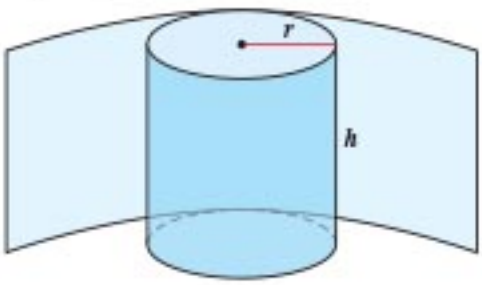


Дати ваљак има полупречник r и висину h.

Ваљак је сачињен од две основе и једне бочне стране који је закривљена површина.

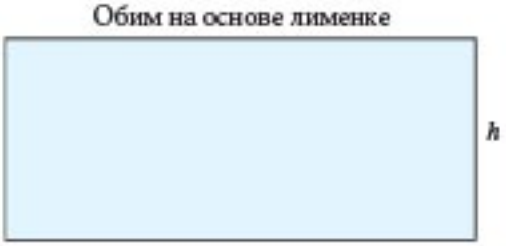
Површина основе $= \pi r^2$.

Да бисмо одредили површину бочног зида, замишљамо да је ваљак лименка и да скидамо налепницу залепљену по читавој површини бочне стране.



Бочна страна је у ствари правоугаоник.

Обим на основе лименке



Висина правоугаоника је h, а његова дужина је једнака обиму кружнице која је пресек бочне стране и основа лименке.

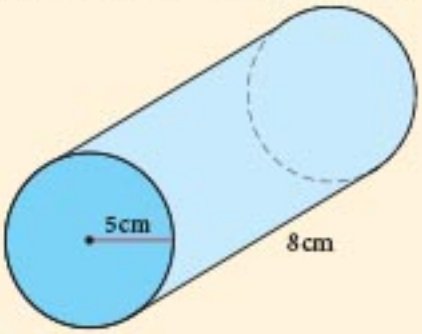
Обим кружнице је $2\pi r$, па је површина правоугаоника $2\pi rh$.

Површина ваљка = површина бочне стране + површина оба круга (основе).

површина ваљка $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

Пример 3

Израчунај површину датог ваљка. Решење заокругли на 3 значајне цифре.



Површина једне основе $= \pi r^2$

$= \pi \cdot 5^2$

$= 78{,}5398$ Не заокругљујемо на 3 значајне цифре, све до крајњег решења.

Површина друге основе $= 78{,}5398$

Површина бочне стране $= 2\pi rh$

$= 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 8$

$= 251{,}3274$

Јединица мере је cm^2 зато што израчунавамо површину.

Укупна површина $= 78{,}5398 + 78{,}5398 + 251{,}3274$

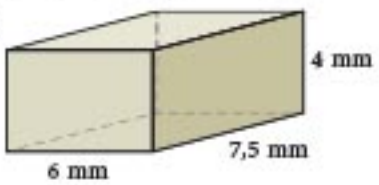
$= 408\ cm^2$ Заокругљена на 3 значајне цифре.

Задаци

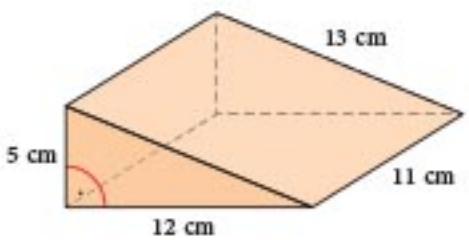
Решења следећих задатака да се заокруже на 3 значајне цифре тамо где је то неопходно.

1. Израчунај запремину датих призми.

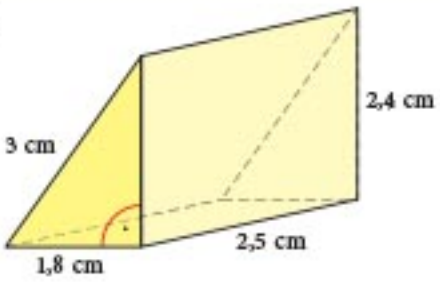
а)



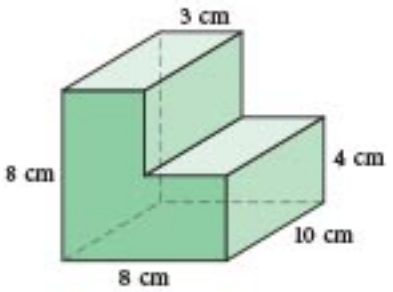
б)



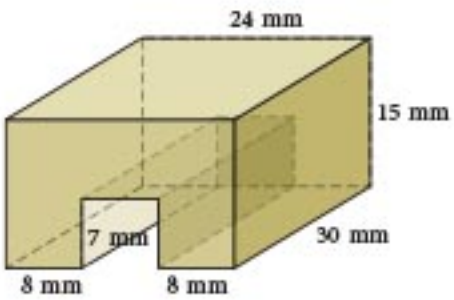
в)



г)



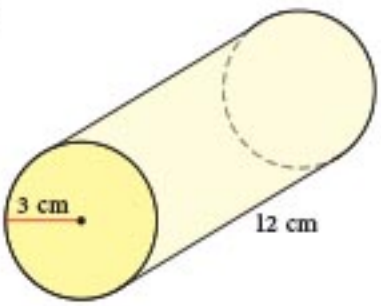
д)



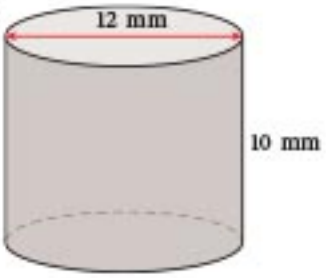
2. Израчунај површину призми из задатка **1.**

3. Израчунај запремине следећих ваљака.

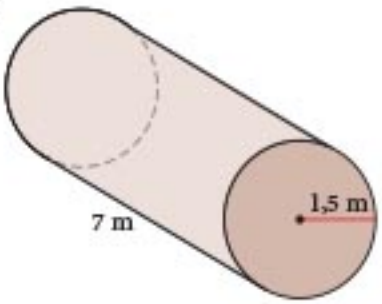
а)



б)



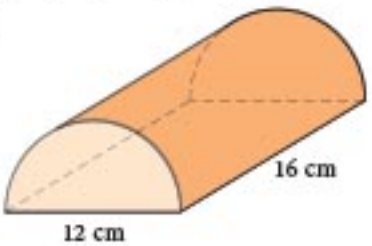
в)



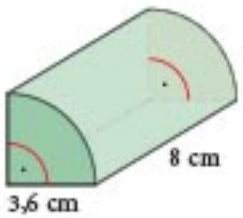
4. Израчунај површину ваљка из задатка **3.**

5. Израчунај запремину датих 3Д-форми.

а)



б)



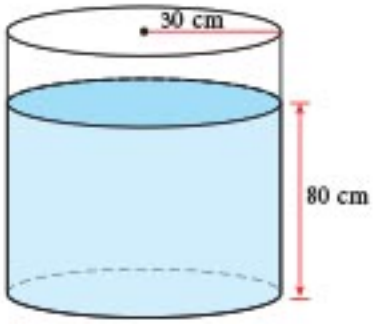
6. Израчунај запремину 3Д-форме из задатка **5.**

7. Једно буре са водом има облик ваљка полупречника 30 cm. Вода у бурету је дубока 80 cm.

а) Колика је запремина воде у бурету?

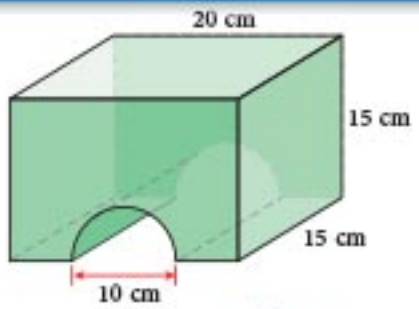
б) Колико литара воде има у бурету?

$1\ cm^3 = 1$ милилитар



8. **а)** Израчунај запремину 3Д-форме приказане на цртежу.

б) Израчунај њену површину.

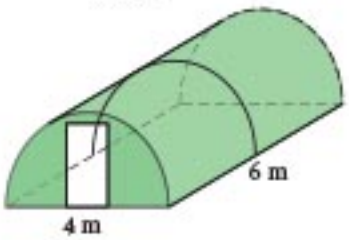


9. На слици је приказан Филипов стакленик, изграђен помоћу три обруча.

Сваки обруч је полукружница.

Ширина стакленика је 4 метра.

а) Израчунај дужину сваког обруча.



Филип је хтео да купи грејалицу на распродаји.

Она је довољно јака да загреје простор од 40 m^3.

б) Израчунај запремину стакленика.

в) Да ли је грејалица довољно јака да загреје цео Филипов стакленик?

Израчунај површину једне полукружнице.

Затим је помножи са дужином стакленика да пронађеш запремину.

10. Један новчић има дебљину 3,15 mm и пречник 22,5 mm.



Колекционар прикупља овакве новчиће и ставља их на гомилу.

Гомила садржи 56 идентичних новчића.



а) Израчунај укупну висину гомиле новчића.

б) Израчунај запремину гомиле новчића у cm^3.

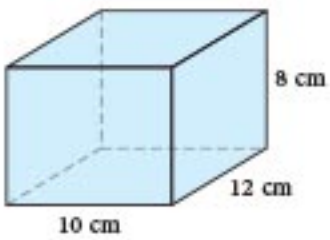
Води рачуна о различитим јединицама мере. Претвори дужине у центиметре пре израчунавања запремине.

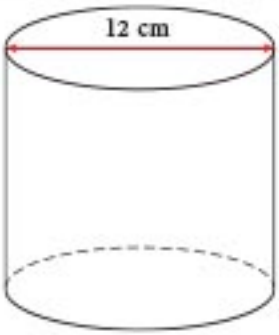
Сваки новчић има масу 9,5 грама.

в) Израчунај укупну масу гомиле новчића.

Решење запиши у килограмима.

11. Резервоар у облику квадра приказан лево је пун воде.





Прво израчунај запремину воде у резервоару у облику квадра.

Вода се прелива у резервоару у облику ваљка приказаном десно.

Израчунај коју висину ће достићи вода у ваљку.

Решење заокругли на најближи милиметар.

Задаци за понављање

1. Израчунај средњу брзину у km/h возила која пролазе.

а) 210 km за $3\frac{1}{2}$ сата.

б) 168 km за 4 сата.

в) 17 km за 3 сата и 24 минута.

г) 285 km за 3 сата и 48 минута.

2. Пронађи пут који пролазе објекти крећући се брзином од:

а) 56 km/h за 6 сати

б) 12 km/h за $4\frac{1}{2}$ h

в) 65 m/s за 12 секунди

г) 250 km/h за 3 h 18 min.

3. Израчунај време потребно да би се прешла следећа растојања. Решења запиши у часовима и минутима.

а) 400 km са 50 km/h

б) 135 km са 27 km/h

в) 240 km са 50 km/h

г) 23,5 km са 2,5 km/h

4. Пуж се помера 23,4 метра за 30 минута.

а) Израчунај његову средњу брзину у метрима/час.

б) Претвори брзину у метар/секунд.

5. Један воз путује 2 h 48 min при средњој брзини 140 km/h.

Колики пут ће прећи за то време?

6. Један аутобус се креће средњом брзином од 55 km/h.

Израчунај колико времена му је потребно да пређе 22 km.

7. Моторно уље се продаје у два различита паковања.



Мала кантица садржи 2 литра и кошта 459 денара.

Велика кантица садржи 4 литра и кошта 999 денара.

Израчунај шта је повољније купити, мању или већу кантицу.

8. Кувани пасуљ се продаје у три различита паковања.

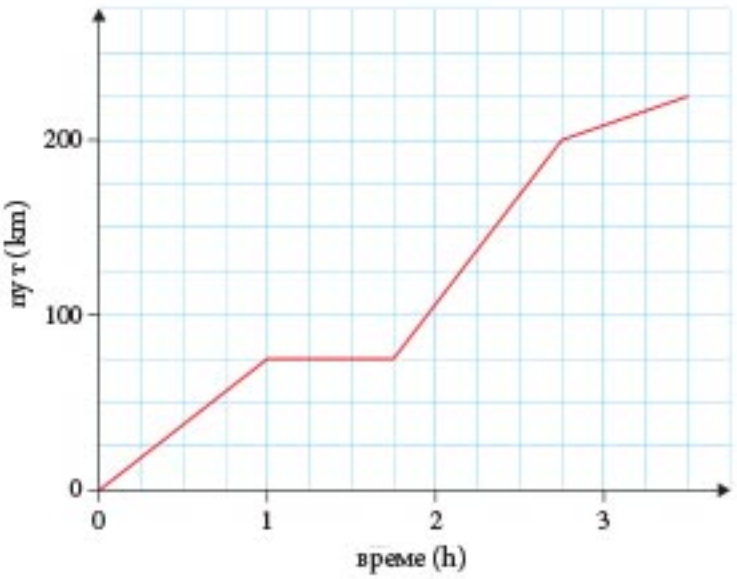


Израчунај које паковање има најповољнију цену.

Прикажи цео поступак.

9. Следећи график приказује пут који је прошао воз после напуштања главне станице.

Кратко после напуштања главне станице воз се зауставио на семафору.



а) Колики укупни пут је прешао воз?

б) Израчунај средњу брзину за цели пут, узимајући у обзир време док је воз чекао на семафору.

Запиши решење заокругљено на 1 децимално место.

в) Израчунај средњу брзину којом се кретао воз, без времена чекања на семафору.

Запиши решење заокругљено на 1 децимално место.

10. Златко има резервоар који може да сакупи 25 литара течности.

Он хоће да напуни неколико малих лименки у облику ваљка.

Свака лименка је висока 10 cm и има полупречник 3 cm.

Златко хоће да напуни 100 лименки.

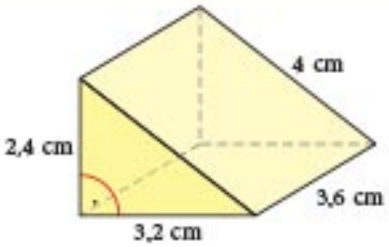
Упамти да 1 литар = 1000 cm^3.

Израчунај да ли он има довољно течности да напуни свих 100 лименки?

Покажи поступак.

11. **а)** Израчунај запремину ове призме у cm^3.

б) Израчунај запремину призме у mm^3.



12. Израчунај површину призме из претходног задатка.

а) Решење запиши у cm^2.

б) Решење запиши у mm^2.

13. Претвори следеће запремине у дате мерне јединице.

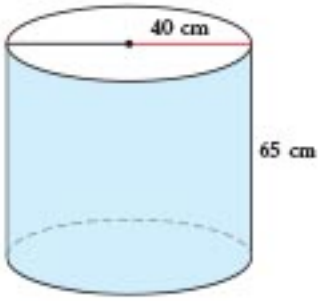
а) $3\ m^3$ у cm^3 **б)** $8000\ mm^3$ у cm^3 **в)** $4\ cm^3$ у mm^3 **г)** $3500000\ cm^3$ у m^3

14. На цртежу је приказан резервоар за воду у облику ваљка.

а) Израчунај запремину резервоара у cm^3.

б) Запиши запремину резервоара у литрима.

Заокругли решење на најближи литар.



15. Запиши у милилитрима запремину резервоара који има запремину:

а) $450\ cm^3$ **б)** $1000\ cm^3$ **в)** $5000\ mm^3$

16. Запремина резервоара је $2\ m^3$.

Израчунај колико литара може да прикупи резервоар.

10 Рад са подацима и решавање проблема

Наставни циљеви

- Избор, цртање и тумачење дијаграма, укључујући:
  - дијаграме фреквенција за дискретне и континуиране податке;
  - линијски график за временски период;
  - дијаграме са тачкама за развијање разумевања за корелацију;
  - узастопни стабло-лист дијаграми.
- Тумачење табела, графика и дијаграма са дискретним и континуираним подацима, извођење закључака, повезујући статистичке податке и закључке са првобитним питањем.
- Разумевање релативне фреквенције као процене вероватноће и њено коришћење за упоређивање резултата експеримената у различитом контексту.
- Знање да је збир вероватноћа догађаја који се међусобно искључују једнак 1 и употреба те чињенице за решавање проблема.
- Проналажење и евиденција свих резултата два узастопна догађаја.

10.1 Дијаграми са тачкама и корелација

Камповање и продаја сладоледа

Френсис Галтон је био енглески математичар који је живео у XIX веку.

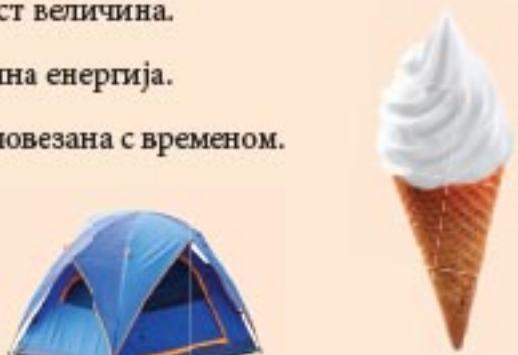
Он је дефинисао многе статистичке идеје, између осталих и корелацију.

Корелација укључује потребу за усаглашеност и повезаност величина.

На пример, када је топло време, мање се користи електрична енергија.

Количина електричне енергије која се користи директно је повезана с временом.

При топлом времену више људи одлази на камповање и продаје се више сладоледа. Постоји усаглашеност између продаје сладоледа и камповања, али то није директно повезано – обе радње зависе од времена.



Дијаграми са тачкама

Дијаграми са тачкама се употребљавају да се прикажу парови података.

Тачке у координатном систему представљамо ознаком „x".

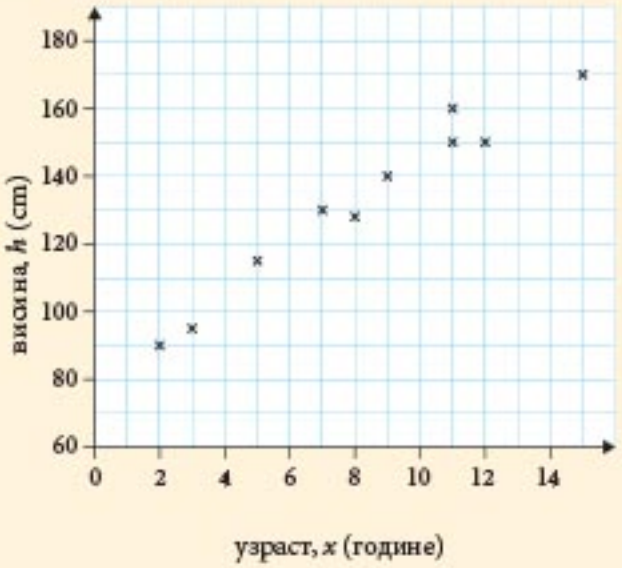
Када цртамо дијаграме са тачкама, тачке морамо да цртамо врло пажљиво.

Пример 1

У табели је приказана висина h, у центиметрима, и узраст x, y годинама, више деце.

Узраст, x (години)	2	3	5	7	8	9	11	11	12	15
Висина, h (cm)	90	95	115	130	128	140	150	160	150	170

Нацртај дијаграм са тачкама да прикажеш ове податке.

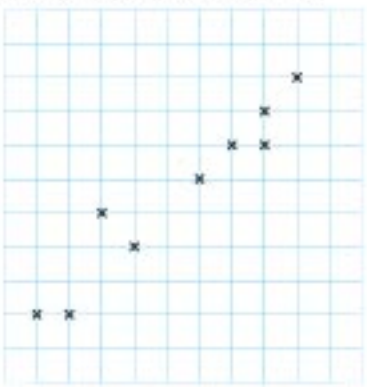


Корелација

Дијаграме са тачкама користимо када треба да прикажемо **корелацију** података.

Корелација је веза између две променљиве. При тумачењу дијаграма са тачкама, може се догодити да нађемо једну или две тачке које не прате образац који важи за остале тачке.

Дат дијаграм приказује **јаку позитивну корелацију**.

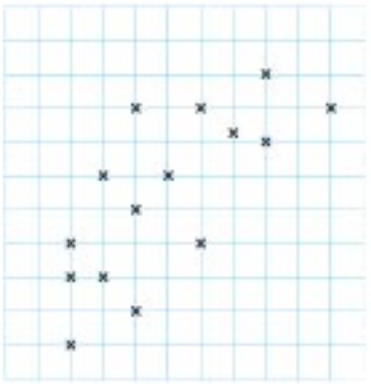


Тачке су близу замишљене праве која се протеже „од доле лево, до горе десно" на дијаграму са тачкама.

Ако тачке припадају правој, онда то називамо савршена позитивна корелација.

Овај дијаграм приказује слабу позитивну корелацију.

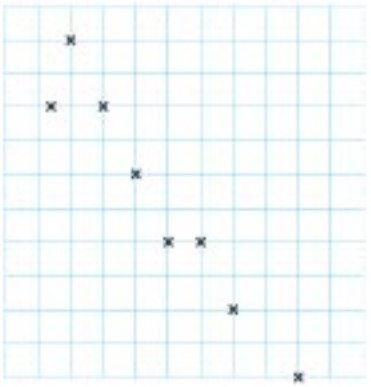
Тачке нису близу замишљене праве, али још увек постоји општа тенденција или облик која се протеже „од доле лево, до горе десно" на дијаграму са тачкама.



Овај дијаграм приказује јаку **негативну корелацију**.

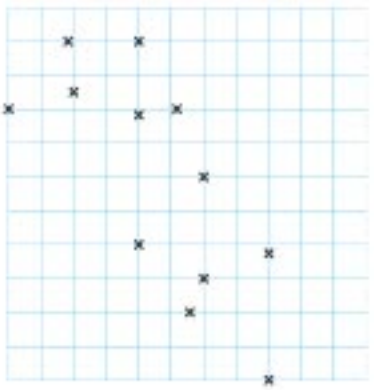
Тачке су близу замишљене праве која се протеже „од горе лево, до доле десно" на дијаграму са тачкама.

Ако тачке припадају правој, то се назива савршена негативна корелација.



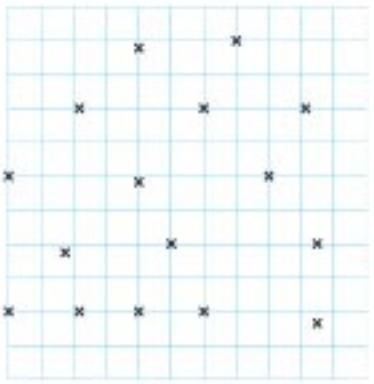
Овај дијаграм приказује слабу негативну корелацију.

Тачке нису близу замишљене праве, али још увек постоји општа тенденција или облик која се протеже „од горе лево до доле десно" на дијаграму са тачкама.



Овај дијаграм **не приказује корелацију**, односно приказује **нулту корелацију**.

На овом дијаграму са тачкама није приказана никаква тенденција или облик.



Пример 2

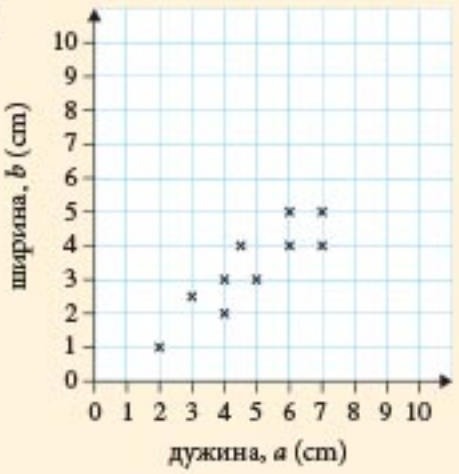
У табели су приказане дужина a, у cm, и ширина b, у cm, за неколико каменчића са плаже.

Дужина, a (cm)	4	5	4	6	4,5	3	7	7	2	6
Ширина, b (cm)	2	3	3	4	4	2,5	4	5	1	5

а) Нацртај дијаграм са тачкама да прикажеш дужине и ширине каменчића.

б) Каква је корелација приказана на дијаграму са тачкама?

а)



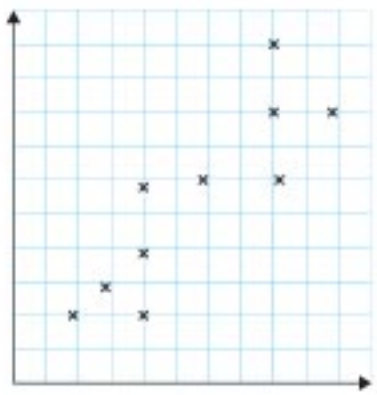
б) Дијаграм са тачкама приказује позитивну корелацију.

То значи да су дужи каменчићи шири.

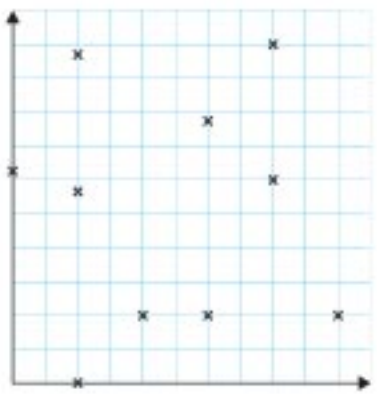
Задаци

1. Као део свог домаћег задатка, Петар је нацртао ове дијаграме са тачкама.

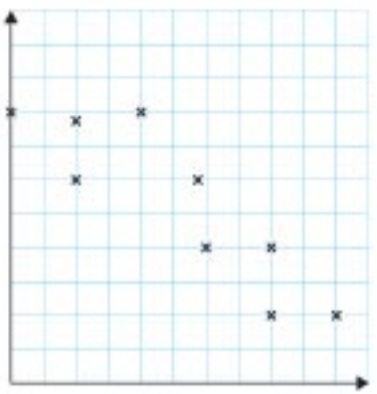
дијаграм 1



дијаграм 2



дијаграм 3

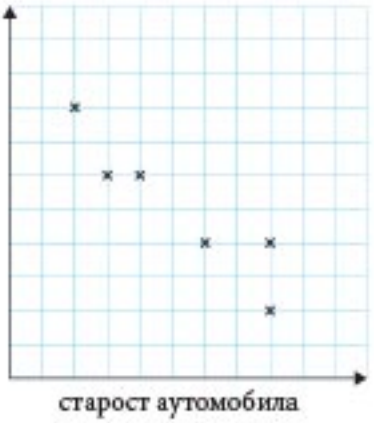


а) Који дијаграм приказује:

I негативну корелацију

II позитивну корелацију

б) Хоризонтална оса овог дијаграма са тачкама је означена као „старост аутомобила“.



Која од следећих ознака би била одговарајућа за вертикалну осу?

снага мотора, боја, цена, маса, дужина

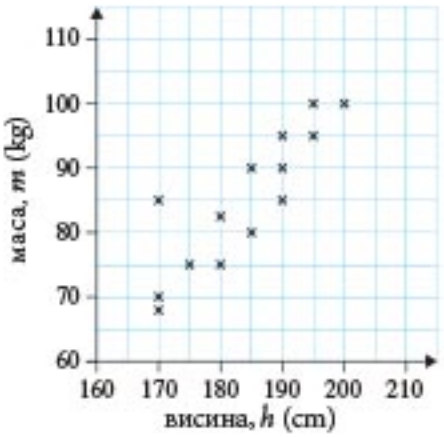
2. У табели је приказан број послатих текстуалних порука и број позива сваког ученика у једној групи.

Број СМС порука	16	18	20	24	25	30	38	42
Број позива	40	39	35	32	28	22	12	8

а) Нацртај податке на дијаграму са тачкама.

б) Опиши корелацију приказану на дијаграму са тачкама.

3. Дијаграм са тачкама приказује висине h, у cm, и телесне масе m, у kg, фудбалера једног клуба.



а) Колика је телесна маса најлакшег фудбалера?

б) Колика је висина највишег фудбалера?

в) Један фудбалер има већу телесну масу за своју висину. Одреди висину и телесну масу овог фудбалера.

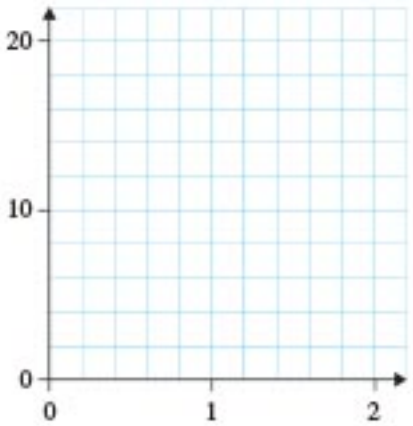
г) Одреди корелацију према дијаграму са тачкама.

4. Зорица је записала времена неколико својих шетњи у току последњих неколико дана.

Растојање (km)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3	3,5	4	4,5
Време (минути)	6	11	12	18	25	28	32	31	27	55

а) Нацртај податке на дијаграму са тачкама.

Користи приказани координатни систем. Продужи хоризонталну осу до 5, а вертикалну осу до 60.



б) Током једне од шетњи пела се на велике висине.

Колико километара је била дуга ова шетња? Колико времена је трајала ова шетња?

в) Одреди у каквој су корелацији подаци на дијаграму са тачкама.

5. У табели су приказани цена и старост неколико половних аутомобила.

Старост (године)	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Цена (денари, хиљаде)	15	12,5	10	9	10	7	12,5	6,5	4,5	2,5	3	2

а) Нацртај податке на дијаграму са тачкама.

б) Одреди у каквој су корелацији подаци на дијаграму са тачкама.

в) Један аутомобил припада „специјалној серији".

Шта мислиш, који је то аутомобил? Објасни свој одговор.

6. Једна ауто-школа је прикупљала податке о броју часова које су похађали њени ученици и о броју покушаја до успешног полагања теста.

Број часова	15	18	20	25	30	40	30	60	50	45	35	70	60
Број тестова	1	1	1	2	1	3	2	1	3	3	2	5	4

а) Нацртај податке на дијаграму са тачкама.

б) Одреди у каквој су корелацији подаци на дијаграму са тачкама.

в) Александар је хтео да зна колико часова вожње му је потребно да би положио тест.

Користи размере од 2 cm за 10 часа на вертикалној оси и 2 cm за сваки тест на хоризонталној оси.

Који би пар вредности Александар требало да занемари? Објасни свој одговор.

7. У табели су приказани резултати два теста из математике ученика у једном разреду.

Тест 1	25	50	35	59	45	56	28	23	32
Тест 2	30	52	40	64	48	59	30	30	83

а) Нацртај податке у дијаграму са тачкама.

б) Један од резултата на тесту није записан тачно.

I Шта мислиш, који је то резултат?

II Колико треба да износи тај резултат?

в) Маја је одсуствовала са другог теста. Она је освојила 40 поена на првом тесту. Користи дијаграм да процениш њен резултат на другом тесту.

10.2 Експериментална вероватноћа

Бифонова игла

Ову идеју записао је 1777. године Жорж Луј Леклерк, гроф де Бифон.

Потребна је игла, али може да се замени сламчицом или шибицом.

Нацртано је неколико паралелних дужи, све на једнаком међусобном растојању. Растојање између дужи треба да буде два пута веће од дужине игле.

Иглу бацамо на дужи. У свеску записујемо да ли игла додирује или не додирује неку од дужи.

Експеримент се понавља неколико пута.

Затим се проналази релативна фреквенција кад се „додирне дуж".

Ако се експеримент понавља довољно пута, онда фреквенција може да се искористи за процену вредности броја π.

Са извођењем овог експеримента практично решавамо један од најстаријих проблема геометријске вероватноће.



Релативна фреквенција



Када бацамо једну прибадачу, могућа су два исхода.

Она може пасти са врхом окренутим нагоре, или надоле.

Ови исходи могу да буду подједнако вероватни или да не буду подједнако вероватни.

Можемо да урадимо **експеримент** како бисмо проценили вероватноћу.

Ексер можемо да бацамо више пута и да записујемо резултате.

Свако бацање прибадача називамо **покушај**.

Затим користимо резултате да бисмо пронашли фреквенције помоћу следеће формуле.

$$\textbf{Релативна фреквенција} = \frac{\text{број успешних покушаја}}{\text{укупан број покушаја}}$$

Релативну фреквенцију понекад називамо **експериментална вероватноћа**.

Релативну фреквенцију користимо за процену вероватноће исхода догађаја.

Што је већи број покушаја који се користе за процену вероватноће, толико ће боља бити и процена.

Број покушаја који су потребни да пронађемо експерименталну вероватноћу зависи од броја могућих исхода.

Број покушаја треба да буде око 50 пута већи од броја исхода.

На пример, када бацамо нефер-новчић са два могућа исхода, требало би да је довољно 100 бацања.

Када бацамо новчић, исходи „писмо“ и „глава“ су једнако вероватни. Када је новчић нефер, исходи „писмо“ и „глава“ нису једнако вероватни.

Када понављамо експеримент, не треба да очекујемо да добијемо исте резултате.

Примена вероватноће

Када обичну коцкицу бацамо много пута, очекујемо да сваки од шест бројева падне исти број пута.

У пракси се то не догађа.

Свих шест бројева пада приближно исти број пута.

На пример, ако једну коцку бацамо 300 пута, очекујемо да сваки број падне

$\frac{1}{6} \cdot 300 = 50$ пута

У пракси бисмо највероватније добили фреквенције близу 50.

Ако су фреквенције различите, постоји могућност да сумњамо да је коцка нефер.

Пример 1

Јована окреће вртешку 150 пута. Стрелица на вртешци је стала на црвено 40 пута.

а) Колика је експериментална вероватноћа да је стрелица на вртешци стала на црвено?

б) Колика је експериментална вероватноћа да стрелица на вртешци није стала на црвено?

в) Вртешка се окренула 200 пута.

Процени колико ће пута стрелица на вртешци стати на црвено.

а) $\frac{40}{150}$ Број стајања на црвено / укупан број покушаја

б) $1-\frac{40}{150}$ P (исход се није догодио) = 1 – P (исход се догодио)

$=\frac{110}{150}$

в) $\frac{40}{150}\cdot 200$ Вероватноћа · број окретања

$= 53,(3)$

Број исхода треба да буде дат као цели број.

Добра процена је да је на црвено стала око 53 пута.

Пример 2

Томе је засадио једну врећу луковица лала различитих боја у свом врту.

Све луковице су порасле и расцветале су се.

У табели су приказане боје расцветалих лала.

Боја	црвена	жута	наранџаста	љубичаста
Фреквенција	8	32	6	4

а) Колико луковица је засадио Томе?

б) Израчунај релативну фреквенцију за сваку боју.

в) Решења под **б)** користи да израчунаш број љубичастих лала које ће бити произведене из вреће са 240 мешаних луковица.

а) $8+32+6+4=50$ лала

б)

Боја	црвена	жута	наранџаста	љубичаста
Фреквенција	8	32	6	4
Релативна фреквенција	$\frac{8}{50}$	$\frac{32}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{4}{50}$

в) $\frac{40}{150}\cdot 240=19,2$

Процена броја љубичастих лала је 19.

Пример 3

Коцкица је бачена 240 пута.

У табели су приказане фреквенције могућих исхода.

Резултат	1	2	3	4	5	6
Фреквенција	10	20	50	60	40	60

Одговори да ли је коцка вероватно нефер.

Објасни свој одговор.

$\frac{1}{6} \cdot 240 = 40$, онда можемо очекивати да ће се око 40 пута појавити сваки исход.

10 је много мање од 40, онда закључујемо да је коцка вероватно нефер.

Ако коцку бацимо више пута, онда можемо да докажемо да имамо нефер коцку.

Задаци

1. У једном салону аутомобила продају се аутомобили у шест различитих боја.

У табели је приказан број аутомобила сваке боје.

Боја	бела	плава	жута	црна	зелена	сива
Фреквенција	11	4	2	12	5	6

а) Одреди релативну фреквенцију за сваку боју аутомобила.

б) Менаџер је случајно одабрао један аутомобил. Процени вероватноћу да је одабрани аутомобил жуте боје.

2. Бојана је записивала колико пута касни њен аутобус. Од укупно 45 случајева, аутобус је каснио 6 пута.

а) Процени вероватноћу да ће аутобус каснити сутра.

б) Она иде аутобусом 10 пута недељно. Колико пута може да очекује да ће аутобус каснити?

3. Једна коцкица се баца 20 пута.

У табели фреквенције приказано је колико пута је пао сваки од бројева од 1 до 6.

Број	1	2	3	4	5	6
Фреквенција	2	6	4	7	0	1

а) Колика је релативна фреквенција броја 4 за ову коцку?

б) Ако је коцка нефер коцка, према резултатима из табеле, процени вероватноћу да ће број 4 пасти у следећем бацању.

в) Ако је коцка фер коцка, запиши вероватноћу да ће број 4 пасти у следећем бацању.

4. Вероватноћа да ће авион слетети са закашњењем је 0,3.

Од укупно 300 летова, колико пута се очекује да авион слети са закашњењем?

5. Једна компанија израђује делове за рачунаре.

Тестирала је 300 делова да би видела колико дуго ће трајати.

25 делова је трајало мање од 500 часова.

220 делова је трајало између 500 и 2000 часова.

Остали делови су трајали више од 2000 часова.

а) Процени вероватноћу да један део траје мање од 500 часова.

б) Процени вероватноћу да један део траје више од 500 часова.

в) Једна продавница је поручила 4000 делова.

Процени колико њих би трајало дуже од 5000 часова.

6. Софија има коцку коју баца али не добија онолико шестица колико би желела.

Она је урадила експеримент да би видела да ли је коцка нефер у односу на шестице.

Бацила је коцку 100 пута и при сваком бацању је записивала да ли пада 6 или не.

У табели десно су приказани резултати, у групама по 10.

„6“ значи да је пала шестица, а „Н“ да није пала шестица.

Н	Н	Н	Н	6	Н	Н	Н	6	6
Н	Н	6	Н	Н	Н	Н	Н	6	6
6	Н	Н	Н	Н	Н	Н	6	Н	Н
Н	Н	Н	Н	Н	6	Н	Н	Н	Н
Н	6	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	6
Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	6	Н
Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н
Н	6	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н
Н	Н	Н	6	Н	Н	Н	Н	Н	Н
Н	Н	Н	Н	Н	Н	6	Н	Н	6

а) Израчунај релативну фреквенцију за 6 после 10 бацања.

б) Израчунај релативну фреквенцију за 6 после 20 бацања.

в) Израчунај релативну фреквенцију за 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 и 100 бацања.

Препиши и допуни табелу да прикажеш резултате.

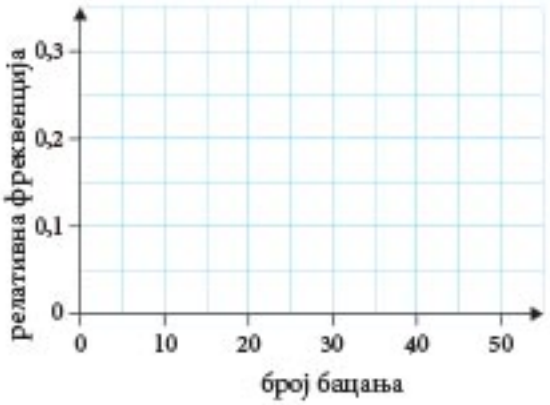
Тамо где је то неопходно, запиши релативну фреквенцију са два децимална места.

Број бацања	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Фреквенција за 6	3									
Релативна фреквенција за 6	$\frac{3}{10} = 0{,}3$									

г) У свеску прецртај приказани координатни систем.

Продужи хоризонталну осу до 100.

У координатном систему означи тачке из табеле.



д) Шта показује дијаграм у вези са релативном фреквенцијом када се број бацања повећава?

ђ) Сматраш ли да је коцка нефер у односу на број 6?

Објасни свој одговор.

7. Приказана вртешка има пет једнаких делова.

Ана и Селма желе да открију да ли је вртешка фер.

Оне су процениле вероватноћу да стрелица стане на црвено.

а) Ана је окренула вртешку 10 пута.

Стрелица је стала на црвено три пута.

Колика је релативна фреквенција црвеног после ових окретања?



б) Селма је окренула вртешку 100 пута.

Стрелица је стала на црвено осам пута.

Објасни зашто би резултати Селме требало да буду боља процена тражене вероватноће.

в) Комбинуј Анине и Селмине резултате.

Користи комбиноване резултате да процениш вероватноћу да стрелица стане на црвено после окретања вртешке.

г) Мислиш ли да је вртешка покварена?

Користи одговор под **в)** да објасниш.

8. Једна четворострана вртешка је покварена.

Да би се проценила вероватноћа сваког броја, експеримент се понавља неколико пута.

У табели су приказани неки резултати.

Број	1	2	3	4
Релативна фреквенција	0,1			0,3

Вртешка стаје на 2 два пута чешће него на 3.

Вртешка се окреће 50 пута.

Колико пута можемо да очекујемо да она стане на 2? Прикажи поступак.

Упамти да збир четири вероватноће мора да буде = 1.

9. На две вртешке су означени бројеви од 1 до 4.

Табеле приказују резултате после 120 окретања сваке вртешке.

Вртешка А	
Резултат	**Фреквенција**
1	28
2	32
3	29
4	31

Вртешка В	
Резултат	**Фреквенција**
1	24
2	23
3	25
4	48

Само једна вртешка је исправна.

За коју вртешку мислиш да није исправна? Објасни свој одговор.

10.3 Исходи који се узајамно искључују

Новчић који је бачен у ваздух може да падне на „писмо“ или на „главу. Оба исхода не могу да се догоде у исто време. За какве исходе који не могу да се догоде истовремено, већ може да се догоди један или други, кажемо да се **узајамно искључују**.

Пример 1

Баца се једна коцкица.

Одреди да ли се исходи А и Б узајамно искључују или се не искључују.

Објасни сваки свој одговор.

а) А: Пао је број 6. Б: Пао је број 3.

б) А: Пао је број 2. Б: Пао је паран број.

а) Исходи се узајамно искључују.

Бројеви 3 и 6 не могу да падну истовремено.

б) Исходи се узајамно не искључују.

Парни бројеви су 2, 4 и 6. Ако је пао број 2, онда је он исто тако и паран број.

Збир вероватноће исхода који се узајамно искључују

Збир вероватноће свих исхода који се узајамно искључују за сваки догађај је 1, зато што ће се један исход сигурно догодити.

Вртешка има шест делова, сви су једнаке величине.

Три боје нису једнако вероватне.

Вероватноћа сваке боје је:

$P(\text{црвена}) = \frac{2}{6}$ $P(\text{бела}) = \frac{1}{6}$ $P(\text{плава}) = \frac{3}{6}$

P(црвена) означава вероватноћу да ће вртешка стати на црвеном пољу.



Поред ове три боје, на вртешки нема других боја, па када се окрене, она ће сигурно стати на једну од ових боја.

То значи да је збир три вероватноће 1.

Ако знамо вероватноћу два исхода, лако можемо пронаћи вероватноћу трећег исхода.

Пример 2

Андреа има вртешку са четири боје.

У табели су приказане вероватноће за три боје.

Боја	црвена	бела	жута	зелена
Вероватноћа	0,1	0,25	0,4	

Колика је вероватноћа да вртешка стане на зеленој боји?

Исходи се узајамно искључују.

Не постоји друга могућа боја.

Зато је збир четири вероватноће 1.

P(црвена, бела или жута) = 0,1 + 0,25 + 0,4 = 0,75.

P(зелена) =1 – 0,75

= 0,25.

Задаци

1. Баца се једна коцкица.

Да ли се исходи А и Б узајамно искључују?

Објасни сваки свој одговор.

а) А: Пао је број 4. Б: Пао је број мањи од 5.

б) А: Пао је паран број. Б: Пао је непаран број.

в) А: Пао је паран број. Б: Пао је број већи од 4.

2. Бојан има кутију са кликерима.

У кутији има црвених, жутих, плавих и зелених кликера.

У табели је приказана вероватноћа за избор црвеног, жутог или плавог кликера.

Боја	црвена	жута	плава	зелена
Вероватноћа	0,1	0,4	0,2	

Колика је вероватноћа да ће Бојан одабрати један зелени кликер?

3. У једној кутији налази се неколико дискова.

Дискови су означени бројевима 1, 2, 3, 4 или 5.

Из кутије се случајно бира један диск.

„Случајним избором" значи да сваки диск има једнаку вероватноћу да буде извучен.

а) Препиши и допуни табелу са вероватноћама да би био одабран сваки број.

Број	1	2	3	4	5
Вероватноћа	0,15	0,25	0,1		0,35

б) Која је вероватноћа већа, да се извуче диск означен непарним бројем или парним бројем?

4. У једној кутији налазе се само црвене, жуте и наранџасте бомбоне.

Из кутије се случајним избором узима једна бомбона.

У табели су приказане вероватноће избора црвене бомбоне и вероватноће избора жуте бомбоне.

Бомбона	црвена	жута	наранџаста
Вероватноћа	0,2	0,35	

Колика је вероватноћа да се узме једна наранџаста бомбона?

5. Новчић који је бачен у ваздух може да падне на „писмо“ (П) или на „главу“ (Г).

У ваздух се истовремено бацају два новчића.

Постоје четири могућа исхода: ПП, ПГ, ГП и ГГ.

а) Колико могућих исхода има, ако се истовремено бацају три новчића?

б) Колика је вероватноћа да сва три новчића падну на исту страну?

6. У две кутије се налазе црвени и жути кликери.

Обе кутије садрже исти број кликера.

Вероватноћа да се одабере један црвени кликер из кутије А је 0,5.

Одабери вредност за број кликера у свакој кутији. Води рачуна о томе да треба да добијеш цели број када ту вредност помножиш са 0,5 и 0,2.

Вероватноћа да се одабере један црвени кликер из кутије Б је 0,2.

Сви кликери из обе кутије се пребацују у трећу кутију В.

Колика је вероватноћа да се одабере један кликер из кутије В?

7. Сваког дана Теова мајка њему даје воће из посуде за воће.

У табели је приказана вероватноћа избора сваке врсте воћа из посуде са воћем.

Воће	јабука	крушка	банана	поморанџа
Вероватноћа	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	

Колики је најмањи број поморанџи које се налазе у посуди за воће?

Објасни решење.

Прво одреди вероватноћу да се одабере једна поморанџа. Затим одреди најмањи заједнички садржалац именилаца.

8. Више сликовних карата се користи у једној дечјој игри.

У табели су приказане вероватноће избора карте са сликом аутобуса, са сликом аутомобила и са сликом скутера.

Слика	аутобус	аутомобил	бицикл	скутер
Вероватноћа	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$

а) Колика је вероватноћа да се одабере карта са сликом бицикла?

б) Који је исход највероватнији?

в) Колика је вероватноћа да се не одабере карта са сликом аутобуса?

г) После одређеног броја игара, карта са сликом скутера је била одабрана 15 пута.

Колико је игара одиграно?

10.4 Табела исхода

Све могуће исходе два узастопна догађаја можемо да запишемо у табели.
Ову табелу свих могућих исхода називамо **табела исхода**.

Пример 1

Истовремено се бацају једна црвена и једна плава коцкица.

Прикажи све могуће исходе у табели исхода.

		црвена коцка					
		1	2	3	4	5	6
плава коцка	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Пример 2

Истовремено се бацају две фер-коцке – једна црвена, а друга плава.

Фер-коцка значи да је сваки број на коцки једнако вероватан.

Сабирају се бројеви који су пали на горњој страни обе коцке.

а) Прикажи све могуће исходе у табели исхода.

б) Користи табелу да би одредио вероватноћу за добијање:

I збир једнак са 3

II збир једнак са 12

III збир већи од 6.

в) Који је укупни збир највероватнији?

а)

		плава коцка					
		1	2	3	4	5	6
црвена коцка	1	2	③	4	5	6	7
	2	③	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

б) **I** $P(\text{збир једнак са } 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Бројимо колико пута се број 3 појављује у табели (приказани заокругљени).

II $P(\text{збир једнак са } 12) = \frac{1}{36}$

Делимо са укупним бројем могућих исхода.

III $P(\text{збир већи од } 6) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

Упрошћујемо разломак ако је то могуће.

в) Највероватнији збир је 7. Постоји шест начина како може да се добије збир 7.

Задаци

1. Један новчић и једна коцкица се бацају истовремено.

Препиши и допуни табелу исхода да прикажеш све могуће исходе.

		коцка					
		1	2	3	4	5	6
новчић	Н	Н, 1					
	Т						

2. Истовремено се бацају две фер-коцке.

Множе се бројеви који су пали са горње стране обе коцке.

а) Прикажи све могуће исходе у табели исхода.

б) Колика је вероаватноћа да се добије производ 10 или мањи од 10?

в) Колика је вероватноћа да се добије производ већи од 20?

г) Колика је вероватноћа да се добије производ – паран број?

3. У једној игри истовремено се бацају две фер-коцке.

Одузимају се бројеви који су пали са горње стране обе коцке.

У табели исхода приказано је неколико таквих разлика.

		коцка 1					
		1	2	3	4	5	6
коцка 2	1	0	1	2			
	2	1	0				
	3	2					
	4						
	5						
	6						

а) Како може да се добије разлика 0?

б) Прецртај и допуни табелу исхода.

в) Колика је вероватноћа да се добије разлика 1?

г) Колика је вероватноћа да се добије разлика – паран број?

д) Колика је вероватноћа да се добије разлика мања од 4?

ђ) Која разлика има вероватноћу $\frac{1}{18}$?

4. На једној тространој исправној вртешци су записани бројеви 1, 3 и 5.

Вртешка се окреће истовремено и баца се једна фер-коцка.

Записујемо збир оба добијена броја.

У табели исхода су приказани неки од збирова.

		коцка					
		1	2	3	4	5	6
вртешка	1	2	3				
	3	4					
	5						11

а) Препиши и допуни табелу исхода.

б) Колика је вероватноћа да се добије збир 9?

в) Колика је вероватноћа да се добије збир мањи од 6?

5. У једној кутији има пет дискова.

Дискови су означени бројевима 2, 4, 6, 8 и 10.

Из кутије се без гледања извлачи један диск.

Затим се он враћа у кутију.

Из кутије се без гледања извлачи други диск.

Записујемо збир бројева оба диска.

У табели исхода су приказани неки од збирова.

		диск 1				
		2	4	6	8	10
диск 2	2	4	6	8		
	4	6	8			
	6	8				
	8					18
	10				18	20

а) Препиши и допуни табелу исхода.

б) Колика је вероватноћа да је збир 16?

в) Шта је веће – вероватноћа да је збир потпуни квадрат, или вероватноћа да је збир потпуни куб?

Објасни решење.

16. је пуни квадрат зато што $4 \cdot 4 = 16$.

27 је пун куб зато што $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

6. Две исправне вртешке приказују бројеве 0, 1 и 2.

Обе вртешке се окрећу.

Записујемо производ од оба добијених бројева.

У табели исхода су приказани неки од могућих производа.

		вртешка 1		
		0	1	2
вртешка 2	0	0		
	1			2
	2		2	4

а) Препиши и допуни табелу исхода.

б) Марија каже: „Постоји само 4 производа, један од њих је 0. Према томе, вероватноћа за добијање производа = 0 је $\frac{1}{4}$."

Објасни зашто је Марија погрешила.

Размисли на колико начина се добијају производи.

Задаци за понављање

1. Марко каже: „Када ради мање каса у супермаркету, ја морам да чекам дуже".

Да би проверио да ли је у праву, он је прикупио следеће податке.

Број каса које раде	3	4	8	6	12	5	10	9
Време чекања (минути)	4	3	5	8	2	3	5	4

а) Нацртај дијаграм са тачкама да прикажеш податке.

б) Мислиш ли да је Марко у праву? Објасни свој одговор.

2. Један аутомобил је случајно одабран на једном паркингу.

Утврди да ли се исходи А и Б узајамно искључују или се не искључују.

Објасни свој одговор.

а) А: Аутомобил има волан на левој страни. Б: Аутомобил има волан на десној страни.

б) А: Аутомобил је црвен. Б: Аутомобил је плав.

в) А: Аутомобил има седишта напред. Б: Аутомобил има седишта назад.

3. Једна коцка за играње је нефер-коцка.

У табели су приказане вероватноће да се добију бројеви 1, 2, 3, 4 и 5, приликом бацања коцке.

Резултат	1	2	3	4	5	6
Вероватноћа	0,15	0,1	0,05	0,1	0,2	

Одреди вероватноћу да падне 6.

4. Јусуф прави сендвиче и продаје их у својој сендвичарници.

У табели су приказане вероватноће за продају сваке врсте сендвича које прави.

Сендвич	са пљескавицом	са туњевином	са салатом	са јајима	са саламом
Вероватноћа	0,3	0,41	0,1	0,25	0,2

а) Да ли постоји грешка у табели?

б) Вероватноћа за сендвич са туњевином није тачна.

Колика треба да буде ова вероватноћа?

в) Јусуф је направио 200 сендвича за продају у својој сендвичарници.

Колико би се могло очекивати да буду са пљескавицом?

5. Једна вртешка има три једнака дела.

Делови су означени бројевима 3, 4 и 5.

Вртешка се окреће два пута.

Записујемо збир оба добијена броја.

а) Препиши и допуни табелу фреквенције да прикажеш могуће збирове.

		друго окретање		
		3	4	5
прво окретање	3			
	4			
	5			

б) Колика је вероватноћа да се добије збир 8?

в) Колика је вероватноћа да се добије збир непаран број?

6. Зерина је бацила ексер 120 пута.

Ексер је пао са врхом окренутим нагоре 35 пута.

а) Колика је релативна фреквенција да ће ексер пасти са врхом окренутим нагоре?

б) Зерина планира да баци ексер 500 пута.

Колико пута може да се очекује да ће ексер пасти са врхом окренутим нагоре?

7. Три ученице из разреда су направиле по једну коцку.

Свака је бацала своју коцку да би тестирала да ли је направљена правилно или није, и записивала резултате.

У табели су приказани резултати три ученице.

	1	2	3	4	5	6
Ања	20	20	20	20	20	20
Бојана	9	11	12	8	9	11
Ема	14	16	12	11	12	25

Одговори на следећа питања. Објасни сваки свој одговор.

а) Која је ученица направила коцку која је вероватно правилна?

б) Која је ученица направила коцку која вероватно није правилна?

в) Која ученица највероватније вара и уопште није бацила коцку?

Број и решавање проблема

1. Препиши изразе. На празна места упиши бројеве који недостају.

а) $17{,}26 \cdot 1000 = \ldots\ldots$

б) $3{,}8 : \ldots\ldots = 0{,}038$

2. Израчунај: $34{,}2 : 6$

3. Дат је производ:

$37 \cdot 291 = 10767$

Израчунај:

а) $3{,}7 \cdot 2{,}91$

б) $107{,}67 : 0{,}37$

4. Дати су следећи бројеви:

0,01 0,1 1 10 100

Искористи четири од ових бројева да би следеће тврдње биле тачне.

Сваки број смеш да користиш највише једном.

$24 \cdot \ldots = 24 : \ldots$

$24 : \ldots = 24 \cdot \ldots$

5. Дат је разломак:

$$\frac{26{,}3 + 47{,}9}{107{,}4 - 3{,}29}$$

а) Резултат израчунај калкулатором.

Запиши све цифре добијене калкулатором.

б) Решење заокругли на 3 децимална места.

6. Препиши изразе. Упиши бројеве у празна поља да добијеш тачне једначине.

а) $4{,}68 : 0{,}8 = 4{,}68 \cdot \square : 8$

б) $56{,}3 \cdot \square = 56{,}3 \cdot 7 : 100$

7. Препиши изразе. Упиши бројеве на празна места да добијеш тачне једначине.

а) $265 \cdot ... = 2{,}65$

б) $45{,}8 : ... = 458$

8. Ово је Николин део домаћег задатка из математике:

$263 \cdot 1{,}15 = 241$

Никола је погрешио.

Објасни како можеш да кажеш да ли је он погрешио, не израчунавајући тачно решење.

9. Запиши експонент који недостаје: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{\square}$

10. Израчунај вредност за $5^3 + 13^2$

11. Израчунај вредност за:

а) 2^{-1} **б)** 2^4

12. Упрости изразе. Решења запиши у виду степена.

а) $x^3 \cdot x^{-5} : x^4$

б) $(y^3)^5 : y^4$

13. Дат је низ бројева

2, 6, 7, 9, 16, 24, 30, 60

Попуни празна места бројевима из низа да би биле тачне тврдње:

а) _____ и _____ су делиоци за 12.

б) _____ и _____ су садржаоци од 15.

в) _____ и _____ су прости бројеви.

г) _____ и _____ су потпуни квадрати.

14. Запиши $\frac{45}{54}$ као нескративи разломак.

15. Запиши $\frac{26}{7}$ као мешовити број.

16. Израчунај $\frac{1}{6}$ од 84.

17. Препиши и допуни израз једним од знакова: = , < или >.

$\frac{15}{100} \square \frac{1}{5}$

18. Запиши све разломке који су међусобно једнаки.

$\frac{7}{27}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{32}{40}$, $\frac{28}{32}$, $\frac{20}{25}$

19. Израчунај $2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{5}$

20. Израчунај $\frac{2}{5}$ од 75.

21. Израчунај $\frac{3}{5}$ од $\frac{4}{7}$.

22. Препиши израз и запиши разломак на празном месту да добијеш тачну једнакост.

$2\frac{1}{3} \cdot \square = 5\frac{5}{6}$

23. Израчунај: **а)** 4^3 **б)** $\sqrt{324}$

24. Израчунај вредност за:

а) $\sqrt[3]{125}$ **б)** 8^0

25. Одабери одговарајућу реч да би тврдње биле тачне.

куб **квадратни корен** **квадрат** **кубни корен**

а) _____ од 14 је 196

б) _____ од 125 је 5

26. Употреби заграде да добијеш тачну једнакост.

$7 \cdot 2 + 1 - 4 = 17$

27. Израчунај:

а) $(4 + 17) \cdot 5 - 3$

б) $4^2 + 48 : (4^2 - 4)$

28. Алек је мерио висину једне биљке.

Почетком прве недеље биљка је била висока 36 mm.

Недељу дана касније она је висока 63 mm.

Израчунај за колико се процената повећала висина биљке.

29. Зина има на свом банковном рачуну 1500 денара које је уштедела.

Банка израчунава каматну стопу од 4% годишње.

Израчунај укупну суму новца на њеном рачуну на крају године.

30. У једном ресторану на износ рачуна се додаје 15% накнаде за услуге.

Колико износи накнада за услуге на рачуну од 450 денара?

31. Фахрета је купила нови аутомобил.

Аутомобил губи 23% своје вредности после првих годину дана.

Крајем прве године Фахретин аутомобил је вредео 657580 денара.

Колику суму је платила Фахрета за аутомобил?

Прикажи поступак.

32. Александар је помешао црвену са белом бојом у односу 5 : 1.

а) Израчунај колико црвене боје треба да помеша са 2 литра беле боје.

б) Израчунај колико беле боје треба да помеша са 2,5 литра црвене боје.

33. У једном возу, однос одраслих лица и деце је 4 : 3.

У возу се вози 120 деце.

Израчунај колико је укупно људи у возу.

34. Запиши размеру 63 : 35 : 49 у најпростијој форми.

35. Алек је помешао 2,4 kg шљаке, 1,5 kg песка и 600 g цемента.
Запиши размеру: шљака : песак : цемент у најједноставнијем облику.

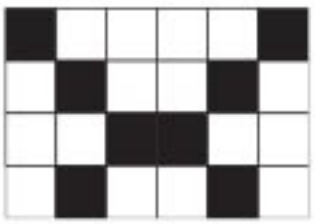
36. Девизни курс хрватске куне и македонског денара је 1 куна = 8,14 денара.

а) Претвори 250 куна у денаре.

б) Претвори 7500 денара у куне.

Заокругли решења на два децимална места.

37. На цртежу је приказана шема црних и белих квадрата.



Запиши размеру црни квадрати : бели квадрати у најједноставнијем облику.

38. Дати су састојци за прављење колача.

Ово је рецепт за 12 колача.

а) Петар хоће да направи 24 колача.

Колико шећера му је потребно?

б) Слађана припрема колаче за 6 људи.

Колико путера јој треба?

в) Гордана припрема колаче за 20 људи.

Израчунај колико брашна јој треба.

Рецепт за колачиће

180 g брашна
60 g шећера
120 g путера

за 12 колачића

39. Лимунада се прави мешањем лимуновог сока и воде у односу 2 : 7.

а) Израчунај колико воде треба да се помеша са 800 ml лимуновог сока.

б) Данијела хоће да направи 36 литра лимунаде за забаву.

Израчунај колико литара лимуновог сока јој треба.

40. Дате су четири размере:

9 : 21 30 : 80 24 : 56 60 : 140

Три размере су еквивалентне.

Израчунај која се размера разликује од друге три размере.

41. Девизни курс америчког долара ($) и евра (€) је $1 = €0,90.

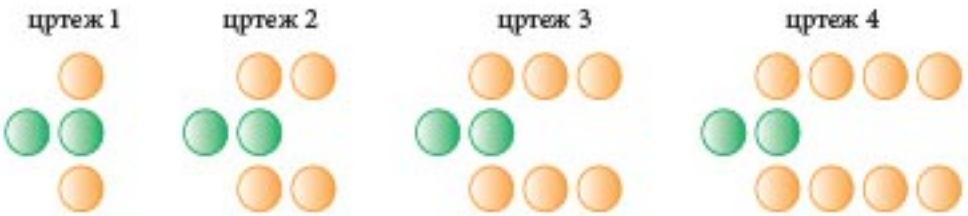
а) Претвори $420 у евре.

б) Претвори 160 € у доларе. Решење заокругли на два децимална места.

42. **а)** Одреди следећег члана низа 4, 7, 10, 13, ...

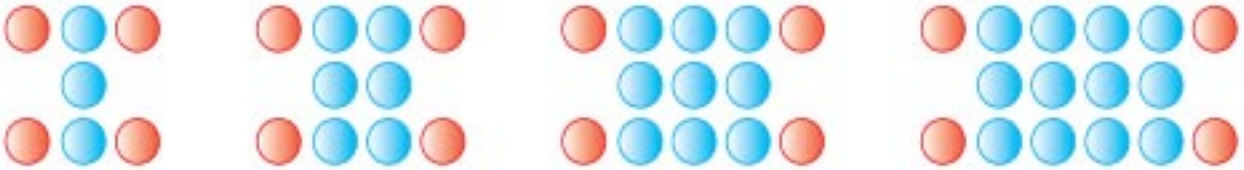
б) Одреди следећег члана низа 25, 18, 11, 4, ...

43.



Нацртај следећи цртеж у низу.

44. цртеж 1 цртеж 2 цртеж 3 цртеж 4



а) Препиши и допуни табелу низа цртежа

Цртеж	1	2	3	4	5	6
Број кругова	7	10				

б) Запиши правило „за одређивање следећег члана“ низа за број кругова.

в) Запиши формулу за број кругова у n-том цртежу.

г) Пронађи број кругова на цртежу 40.

д) Један цртеж низа има 232 кругова.

Одреди вредност за n за овај цртеж.

45. Дат је низ: 5, 10, 20, 40, ...

а) Речима запиши правило „за одређивање следећег члана“ низа.

б) Одреди следећи члан низа.

46. Одреди следећа два члана низа 29, 26, 21, 14, 5, ...

47. Израчунај прва три члана низа чији је n-ти члан $n^2 + 5$.

48. Одреди n-ти члан следећих низова:

а) 3, 6, 9, 12, …

б) 17, 14, 11, 8, …

49. Одреди n-ти члан следећих низова:

а) 1, 4, 9, 16, …

б) 1, 8, 27, 64, …

50. цртеж 1 цртеж 2 цртеж 3 цртеж 4



а) Нацртај цртеж 5.

б) Препиши и допуни табелу за низ цртежа.

Цртеж, *n*	1	2	3	4	5
Број кругова	$2 = 1 \cdot 2$	$6 = 2 \cdot 3$	$12 = 3 \cdot 4$		

в) Запиши правило за одређивање броја кругова у цртежу n.

51. Растојање између Берова и Струге је око 195,73 миље.

Израчунај колико километара има од Берова до Струге.

Алгебра и решавање проблема

1. $p = 5r$

Израчунај p када $r = 4{,}5$.

2. $L = 2a + 2b$

Израчунај L када $a = 6$ и $b = 9$.

3. $E = \frac{1}{2}mv^2$

а) Израчунај E када $m = 7$ и $v = 12$.

б) Израчунај v када $E = 32$ и $m = 9$.

в) Изрази m из формуле.

4. $P = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Израчунај P када $r = 3$ и $h = 7$.

Решење заокругли на 3 значајне цифре.

5. Једна лизалица кошта x денара, а један сладолед кошта y денара.

Запиши формулу за укупну цену T која треба да се плати за 3 лизалице и 5 сладоледа.

6. Изрази f из формуле $g = 5f - 6$.

7. Изрази R из формуле $V = IR$.

8. Изрази x из формуле $2(x - y) = 7y + 8$.

9. Изрази h из формуле $g = \sqrt{h + 2}$.

10. Изрази x из формуле $y = \frac{5x}{2} + 3$.

11. Изрази P из формуле $Q = \frac{2}{P + 1}$.

12. Изрази r из формуле $P = \frac{3\pi r^2}{2}$.

13. Једно пенкало кошта 75 денара.

Запиши израз за укупну цену x пенкала.

14. Упрости израз:

$5x + 7y + 3x - 4y$

15. Израчунај вредност за:

$7x - 3y$ када $x = 2$ и $y = -4$

16. Једна књига кошта 70 денара, а један часопис кошта 30 денара.

Запиши израз за израчунавање укупне суме која треба да се плати за b књига и m часописа.

17. Ослободи се заграда у изразу: $4\,(x - 6)$.

18. Ослободи се заграда и упрости:

$7(3x - 2) - 2(4x - 3)$.

19. Укупна маса x колача је 250 g.

Запиши израз којим ће се израчунати маса једног колачића.

20. Ослободи се заграда и упрости: $(x + 8)(x - 5)$.

21. Упрости:

а) $m^5 \cdot m^3$

б) $p^8 : p^2$

в) $2x^3y^4 \cdot 3x^2y^3$.

22. Упрости израз: $\frac{x}{3} + \frac{2x}{9}$.

23. Растави на чиниоце:

а) $8x + 24$

б) $x^2 - 7x$

24. Одреди коефицијент правца праве која пролази кроз тачке $(5, -2)$ и $(3, 8)$.

25. Допуни табелу вредности за $y = 2x + 3$ и нацртај њен график.

x	-2	0	1
y			

26. Нацртај графике за праве:

а) $y = 3$

б) $y = 2x$

в) $5x + 2y = 10$.

27. Одреди координате тачке у којима права $y = 3x + 4$ сече y-осу.

28. Одреди коефицијент правца за праву $y = 4x + 2$.

29. Права $y = 2x + 5$ сече праву $y = 2$ у тачки P.
Одреди координате за P.

30. Одреди инверзну функцију функције $x \to 2x + 7$.

31. Реши графички систем једначина. Решења заокругли на једно децимално место.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$$

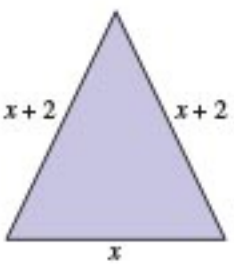
32. y је директно пропорционално x.
$y = 5$ када $x = 25$
Одреди вредност за y када $x = 9$.

33. Реши једначину: $2x + 7 = 19$.

34. Реши једначину: $\frac{8 - x}{3} = 6$.

35. Реши једначину: $4(x - 1) + 3(x + 2) = 30$.

36. Обим троугла на цртежу је 50 cm.
Запиши једначину по x и реши је.



37. Знамо да је $7 < 2x \leq 14$.
Ако x је цели број, запиши све могуће вредности за x.

38. **а)** Реши неједначину $7x > 5x - 6$.

б) Решење прикажи на бројевној оси.

39. Зорица користи методу покушаја и грешака да би решила једначину $x^3 + 2x = 26$

Табела приказује њене прве две процене.

Процена	$x^3 + 2x$	Коментар
2	$2^3 + 2 \cdot 2 = 12$	премало
3	$3^3 + 2 \cdot 3 = 33$	превелико

Настави са попуњавањем табеле да пронађеш решење једначине.

Решење заокругли на 1 децимално место.

40. Реши систем једначина.

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

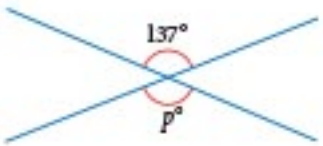
41. Реши систем једначина.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

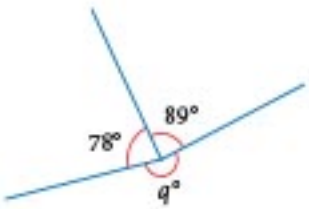
Задаци за самопроверу за теме 3 и 8

Геометрија и решавање проблема

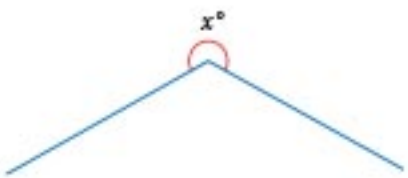
1. **а)** Запиши величину угла $p°$ у степенима.



б) Израчунај величину угла $q°$ у степенима.

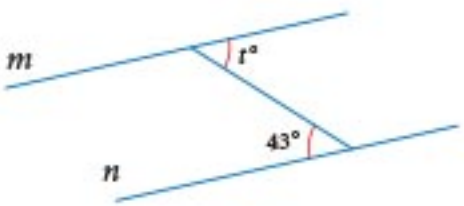


2. **а)** Које је врсте угао $x°$?

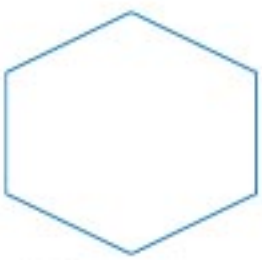


б) Препиши и допуни.

$t°$ = ____ зато што _____



3.

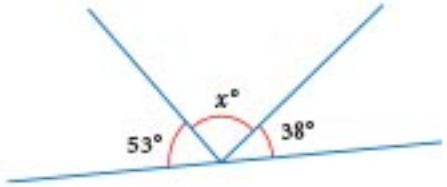


а) Како се назива 2Д-форма на цртежу?

б) Израчунај збир унутрашњих углова за 2Д-форму на цртежу.

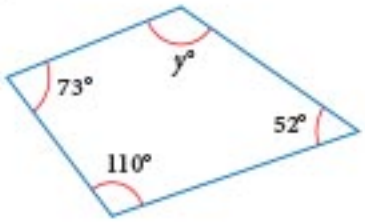
4. **а)** Препиши и допуни.

$x° =$ ____ зато што _____



б) Препиши и допуни.

$y° =$ ____ зато што _____



5. На цртежу је приказан део правилног многоугла.



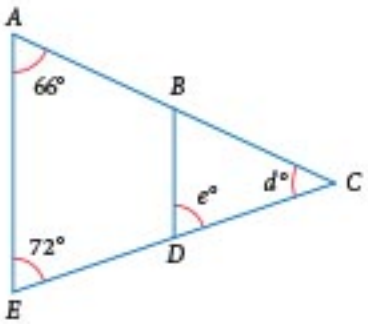
а) Запиши величину угла $a°$.

б) Израчунај број страница многоугла.

6. На цртежу је приказан троугао ACE.

BD је паралелна са AE.

$\sphericalangle BAE = 66°$, $\sphericalangle AED = 72°$



Израчунај:

а) $\sphericalangle BCD$

б) $\sphericalangle BDC$.

Објасни добијена решења.

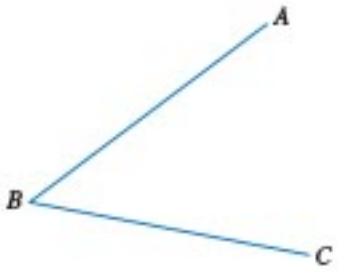
7. Сваки унутрашњи угао правилног петоугла има 108°.

Користећи лењир и угломер конструиши правилан петоугао странице 4 cm.

8. Прецртај цртеж у свеску.

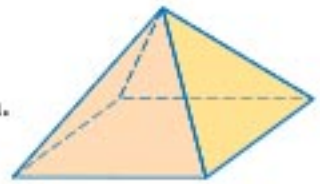
Помоћу лењира и шестара, подели угао на два једнака угла.

Конструиши симетралу датог угла.



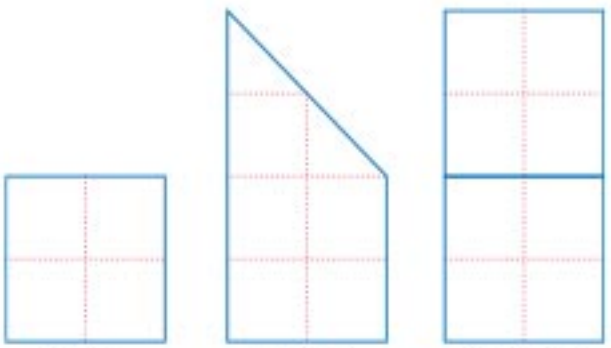
9. **а)** Запиши математички назив 3Д-форме на цртежу.

б) Одреди колико равни симетрије има ова 3Д-форма.



10. Лењиром и шестаром конструиши правилан шестоугао чије су странице 5 cm.

11. На цртежу су приказани план и пројекције једне 3Д-форме.



Нацртај 3Д-форму на изометријском папиру.

12. На цртежу је приказана основа једне старе палате.

Форма основе је правоугаоник са димензијама 700 m и 400 m.

а) Нацртај прецизан цртеж у размери основе палате.

Користи размеру: 1 cm одговара на 50 m.

Стара мапа закопаног блага показује да је нешто закопано у земљу.

То место је са азимутом од 115° од бунара.



То место је на азимуту од 340° од тврђаве.

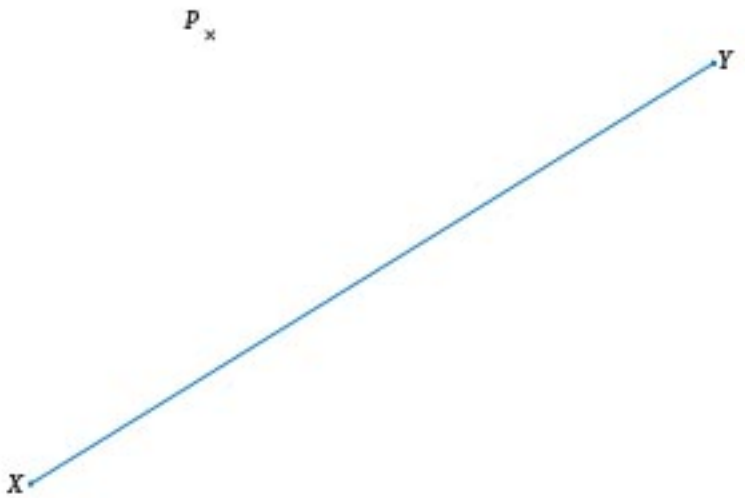
б) Нацртај праву од бунара са азимутом од 115°.

в) Нацртај праву од тврђаве са азимутом од 340°.

г) Са „×“ означи место где се налази закопано благо.

13. Запиши назив 3Д-форме које има шест страна који су квадрати.

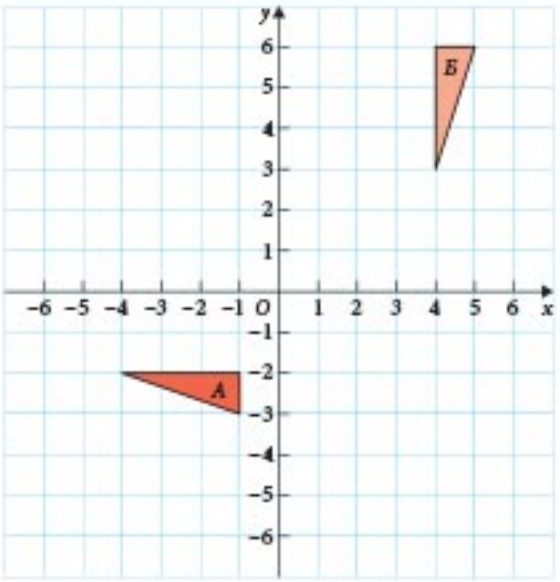
14. Прецртај цртеж у свеску. $\overline{XY}$ је дугачка 10 cm.



Помоћу лењира и шестара конструиши нормалу од тачке P према дужи $\overline{XY}$.

Нормала је права која је нормална на другу праву.

Прецртај квадратну координатну мрежу да решиш задатке **15** *и* **16**.



15. **а)** Нацртај тачку (4,2). Означи је словом P.

б) Нацртај тачку (-4,4). Означи је словом Q.

в) Одреди координату средње тачке за $\overline{PQ}$.

16. **а)** Ротирај троугао А за 90° око (0,0), у смеру супротном кретању казаљки на сату. Означи добијени троугао В.

б) Детаљно опиши јединствену трансформацију од троугла Б у троугао В.

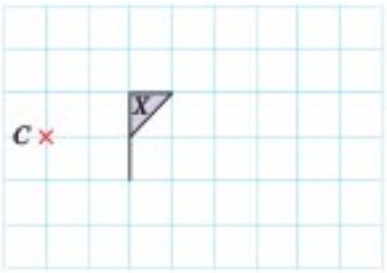
17. Прецртај четвороугао у свеску са квадратићима.

Нацртај тесалацију овог четвороугла.

Потребно је да покажеш бар још пет 2Д-форми.

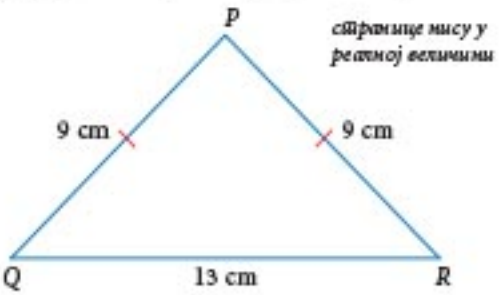


18. Прецртај цртеж у свеску са квадратићима.



Повећај 2Д-форму X са коефицијентом 3 и центром повећавања C.

19. PQR је једнакокраки троугао са $\overline{QR} = 13$ cm и $\overline{PQ} = \overline{PR} = 9$ cm.



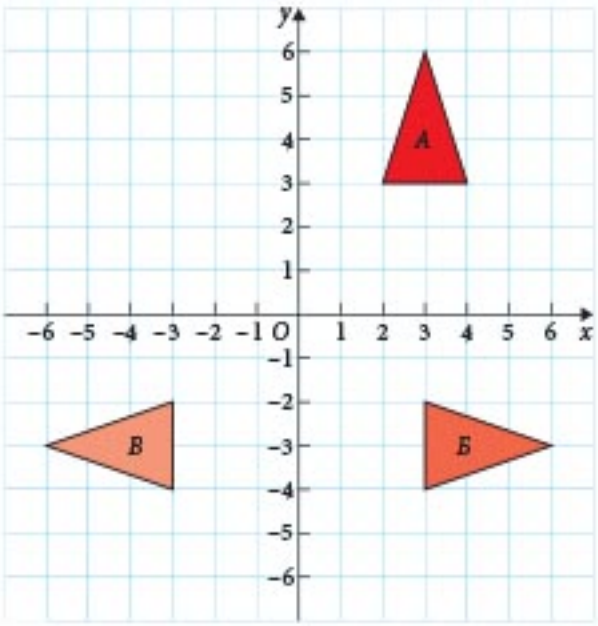
а) Конструиши прецизан цртеж троугла PQR.

б) Нацртај геометријско место тачака које су удаљене 3,5 cm од странице PQ.

в) Нацртај геометријско место тачака које су удаљене 5 cm од тачке P.

г) Означи са X тачку пресека два геометријска места тачака.
Измери растојање XR.

20. На цртежу су приказана три троугла.



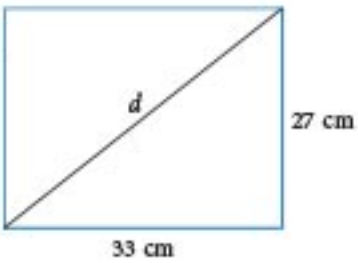
Детаљно опиши трансформацију:

а) троугла А у троугао Б.

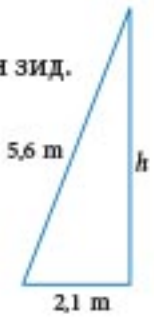
б) троугла Б у троугао В.

Решења треба да буду заокругљена на 3 значајне цифре, ако није другачије наглашено у задатку.

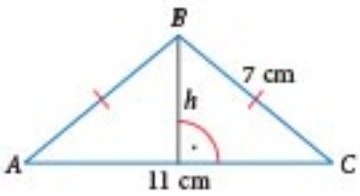
21. Правоугаони телевизијски екран има димензије 33 cm и 27 cm.
Израчунај дужину дијагонале d.
Резултат заокругли на најближи милиметар.



22. На цртежу су приказане мердевине дуге 5,6 метра, ослоњене на вертикалан зид.
Основа мердевина је удаљена 2,1 метара од зида.
Мердевине су постављене на вертикалном поду.
Коју висину досеже горњи део мердевина наслоњених о зид?
Резултат заокругли на најближи милиметар.



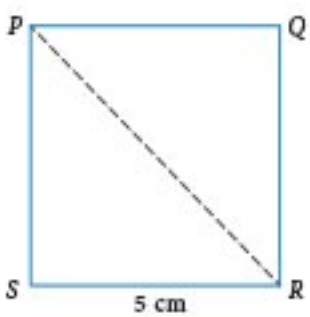
23. ABC је једнакокраки троугао.
$\overline{AB} = \overline{BC} = 7$ cm и $\overline{AC} = 11$ cm



а) Израчунај висину h троугла.

б) Израчунај површину троугла ABC.

24. $PQRS$ је квадрат чије су странице 5 центиметара.
Израчунај дужину дијагонале квадрата.



25. Вертикалан јарбол је висок 28 метара.

Он је постављен на хоризонталној подлози.

Обезбеђен је челичним жицама које се протежу од горњег дела јарбола до подлоге.

Једна од тих жица је приказана на цртежу.

Свака жица је закачена за подлогу у тачки која је удаљена 12,5 метара од основе јарбола.

Израчунај дужину сваке жице.

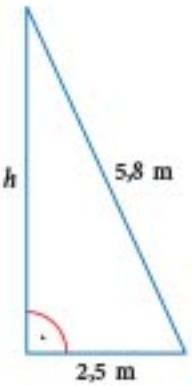


26. На цртежу је приказано једро једне јахте.

Једро је правоугли троугао.

Израчунај дужину странице h.

Резултат заокругли на најближи центиметар.



Мерење и решавање проблема

1. Препиши и допуни следеће тврдње.

а) 4520 милиметара = ... литара.

б) 432 милиметара = ... центиметара.

в) 7,4 тоне = ... килограма.

2. **а)** У једној фабрици производе се машине за прање веша, од којих свака има масу 63 килограма.

Израчунај укупну масу 36 таквих машина.

Решење запиши у тонама.

б) Један камион може да прими терет од максималних 10 тона.

Колико машина за прање веша може да се натовари у камион?

3. Андреј има бокал који садржи 2,4 литра јабуковог сока.

Поделио га је подједнако у 6 чаша.

Израчунај колико милилитара јабуковог сока има у свакој чаши.

4. Лејла је купила траку за завесу дугачку 2,4 метра.

Њој треба трака дугачка 1,95 метара за прозор.

Израчунај колико центиметара треба да одсече од траке коју је купила да би могла да је искористи за свој прозор.

5. Поређај следеће дужине, почев од најмање.

0,28 m 29 mm 27 cm 2,8 m 285 mm

6. Препиши и допуни.

а) 12,3 литра = ... милилитара.

б) 32,6 килограма = ... грама.

в) 4235 центиметара = ... метара.

7. Марко је измерио једну књигу на ваги.

На слици је приказана вага.



а) Запиши масу књиге у грамима.

Марко је хтео да спакује 7 таквих књига да би их послао као поштанску пошиљку.

б) Израчунај укупну масу свих 7 књига у килограмима.

8. Испред локалног биоскопа постављен је следећи натпис.



а) Претвори време у 12-часовни формат.

б) Израчунај у колико сати се завршава филм.

Решење запиши у 24-часовном формату.

9. Аутомобил је прешао 400 метара за 21,5 секунди.

Израчунај његову средњу брзину, заокругљену на 1 децимално место.

10. У табели су дата времена поласка три аутобуса.

	Поласци		
Скопље	13:45	14:54	16:01
Тетово	14:08	15:17	16:24
Гостивар	14:22	15:31	16:38
Маврово	14:58	16:07	17:14
Кичево	15:20	16:29	17:36
Охрид	16:08	17:17	18:24

а) У колико сати ће аутобус, који креће у 14:54 из Скопља, бити у Кичеву?

б) Претвори решење под а) у 12-часовни формат.

в) Емилија је завршила свој посао у Гостивару у 3:50 по подне.

Колико времена треба да чека за следећи аутобус до Охрида?

11. Исцеђени сок од поморанџе се продаје у три различита паковања.

Флаша од 600 ml кошта 69 денара.

Флаша од 1 l кошта 99 денара.

Флаша од 2 l кошта 189 денара.

а) Израчунај цену једног литра за свако паковање.

б) Које паковање има најповољнију цену?

12. Следећа табела приказује дужине времена летова и растојања између Лондона, Куала Лумпура и Окланда.

Растојање између Куала Лумпура и Окланда недостаје у табели.

	Време лета	Растојање (km)
Од Лондона до Куала Лумпура	13 сати и 30 минута	10557
Од Куала Лумпура до Окланда	11 сати и 24 минута	

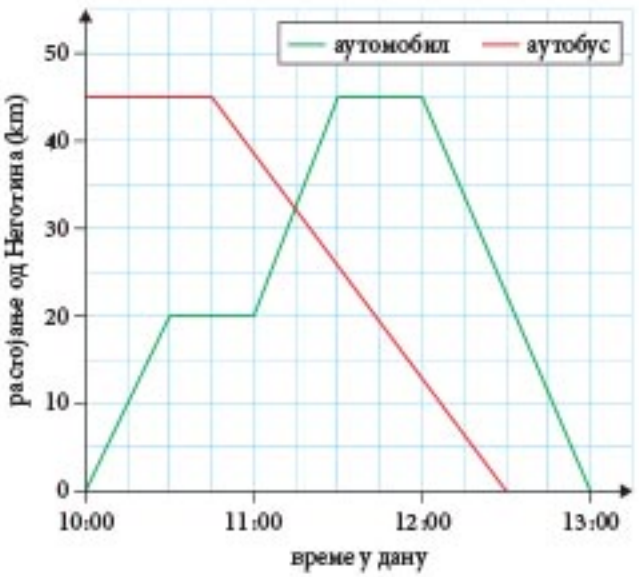
а) Израчунај средњу брзину авиона између Лондона и Куала Лумпура.

б) Средња брзина између Куала Лумпура и Окланда је 765 km/h.

Израчунај растојање између Куала Лумпура и Окланда.

13. Зелена боја графика приказује путовање аутомобилом од Неготина до Струмице.

Два града су удаљена 45 километара.



Аутомобил креће из Неготина у 10:00.

а) У колико сати ће стићи у Струмицу?

б) Колико времена се аутомобил није кретао у Струмици?

Црвена линија приказује кретање аутобуса од Струмице до Неготина.

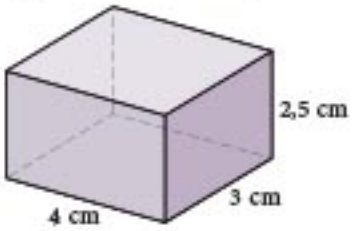
Аутобус је кренуо из Струмице у 10:45.

в) Израчунај средњу брзину аутобуса.

г) Запиши време када ће се аутобус и аутомобил срести.

14. Претвори 1,1 час у часове и минуте.

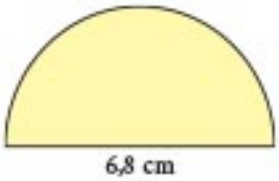
15. Приказани квадар има димензије 4 cm, 3 cm и 2,5 cm.



а) Израчунај запремину квадра.

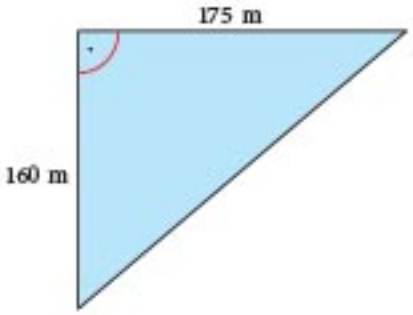
б) Израчунај површину квадра.

16. Полукруг има пречник 6,8 cm.



Израчунај површину полукруга. Решење заокругли на 3 значајне цифре.

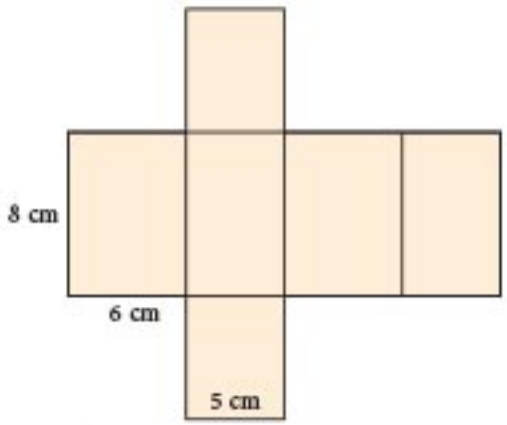
17. На цртежу је приказан план једне њиве.



а) Израчунај површину њиве у квадратним метрима.

б) Решење претвори у хектаре.

18. На цртежу је представљена мрежа једне 3Д-форме.



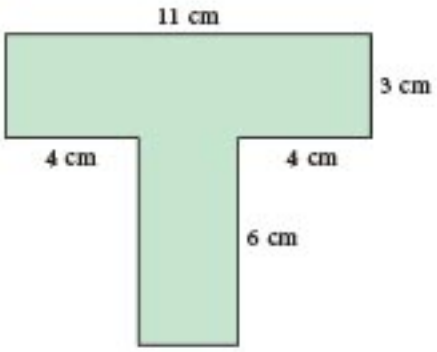
а) Израчунај површину 3Д-форме.

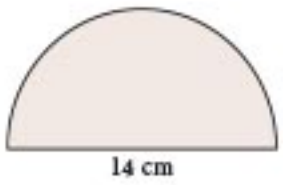
б) Израчунај запремину 3Д-форме.

19. Колико mm^3 има у 1 cm^3?

20. Израчунај која од датих 2Д-форми има већи обим.

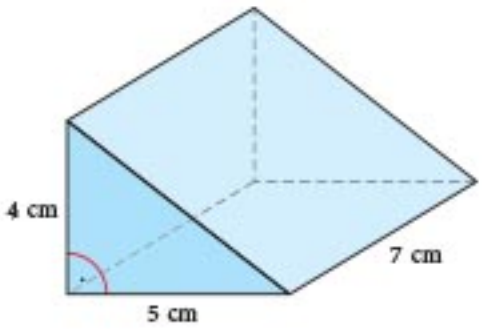
Прикажи све кораке при израчунавању.



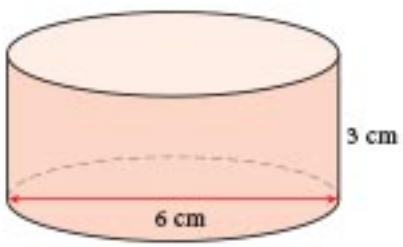


21. Колико cm^2 има у 1 m^2

22. Израчунај запремину призме према подацима на цртежу.



23. На цртежу је представљен ваљак пречника 6 cm и висине 3 cm.



а) Израчунај површину ваљка.

б) Израчунај запремину ваљка.

Рад са подацима и решавање проблема

1. Андреа је бацила коцку тридесет пута.

Записала је резултате бацања.

3 5 4 3 3 6 4 3 1 4

3 1 5 6 4 1 2 4 3 2

6 5 2 6 4 6 4 5 3 3

а) Препиши и допуни колону за фреквенцију у табели коју је направила.

Број	фреквенција
1	
2	
3	
4	
5	
6	
	Укупно 30

б) Одреди:

i Мод

ii Медијану

iii Просек

2. Дарко има четири карте. На свакој карти је записан један број.



а) Ако мод бројева износи 8, а њихова медијана је 6, која два броја недостају?

б) Ако ранг бројева износи 5, а њихов просек 5, која два броја недостају?

3. Дате су висине у центиметрима групе људи.

162 183 175 190 176 169 181 177 171

Израчунај:

а) медијану висина.

б) просек висина.

4. Јован је откуцао 132 речи за 4 минута. Марко је написао 224 речи за 7 минута.

Ко је писао брже?

5. Број минута кашњења аутобуса који стижу на аутобуску станицу су приказани у следећој табели.

Број минута кашњења, m	Фреквенција	Средња вредност класе
$0 < m \leq 10$	16	
$10 < m \leq 20$	10	
$20 < m \leq 30$	11	
$30 < m \leq 40$	8	
$40 < m \leq 50$	5	

а) Препиши табелу и допуни колону за средњу вредност класе. Користи средње вредности класа да процениш просек бројева минута кашњења аутобуса.

б) Која класа садржи медијану бројева минута кашњења аутобуса?

6. 30 ученика решава тест из математике.

На тесту могу да добију највише 50 поена.

Дамјан је направио следећу табелу да би приказао оцене.

Оцене	Фреквенција
0-20	3
20-25	12
25-40	14
40-50	1
Укупно	30

Пронађи две неправилности за табелу.

7. Весна спроводи истраживање да би открила колико времена ученици проводе слушајући радио.

Она је саставила анкету.

Ово је једно од њених питања:

Колико сати проводите слушајући музику на радију сваке недеље?

Молим вас, обележите

- ❑ 1 до 5
- ❑ 5 до 10
- ❑ 10 до 20
- ❑ Више од 20

Пронађи две неправилности у Веснином питању.

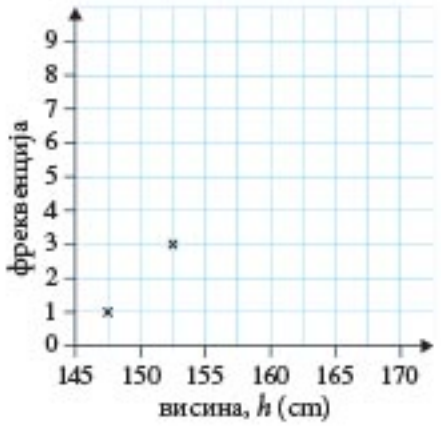
8. Дате су висине заокругљене на најближи центиметар, групе тринаестогодишњих девојчица.

154	162	148	158	163	168	155	160
152	164	162	166	163	167	170	161

а) Прецртај и допуни табелу фреквенција за висине девојчица.

Висина, h (cm)	Цртице	Фреквенција
$145 < h \leq 150$		
$150 < h \leq 155$		
$155 < h \leq 160$		
$160 < h \leq 165$		
$165 < h \leq 170$		

б) Прецртај и допуни полигон фреквенције за висине девојчица.



9. Један научник тестира ново ђубриво. Он гаји неколико биљака у две парцеле, А и Б.

На парцели А се користи ново ђубриво. На парцели Б се не користи ново ђубриво.

Измерио је висине биљака после месец дана узгоја. Медијана за парцелу А је 76,5 cm, а ранг је 46.

Његови резултати су приказани на узастопним стабло-лист дијаграмима.

Парцела А								Парцела Б								
							4	0	1	1	7					
		9	7	6	4	4	1	5	1	2	2	3	3	3	4	6	8
			5	5	5	3	2	6	0	0	3	4	5	5	6	7	9
9	7	7	6	6	4	2	1	7	0	1	2	2	3	7	8		
	9	8	5	3	2	2	0	8	0	1	1	4	6				
		7	7	4	1	1	0	9									

Кључ: 1|7|0 значи висина биљки из парцеле А је 71 cm и висина биљки из парцеле Б је 70 cm.

а) Пронађи медијану висина за биљке из парцеле Б.

б) Пронађи ранг висина за биљке из парцеле Б.

в) Упореди биљке гајене на парцелама А и Б.

Направи два поређења.

10. У једној кутији се налазе само црвене, зелене и жуте лоптице.

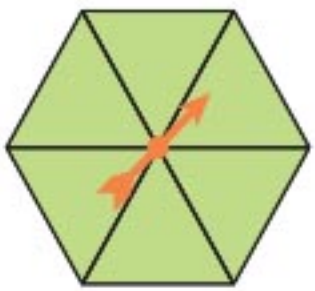
У табели су дате вероватноће случајног избора сваке од боја.

Боја	црвена	зелена	жута	плава
Вероватноћа	0,2	0,1	0,4	

Колика је вероватноћа да се одабере плава лоптица?

11. Дата је исправна вртешка у облику правилног шестоугла.

Вероватноћа да се добије паран број је два пута већа од вероватноће да се добије непаран број.



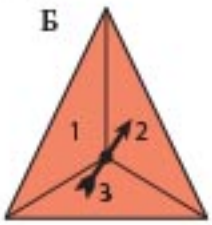
Прецртај цртеж и запиши цели број у сваком делу вртешке да би тврдња била тачна.

12. На цртежу су представљене две исправне вртешке.

А



Б



а) Допуни табелу исхода да покажеш све могуће исходе за обе вртешке.

		вртешка Б		
		1	**2**	**3**
вртешка А	**1**	1, 1	1, 2	1, 3
	3	3, 1		
	5		5, 2	
	7		7, 2	

б) Колика је вероватноћа да се добије непаран збир бројева обе вртешке?

13. Иван је записивао збир два броја која су била на вртешкама.

а) Допуни табелу и прикажи све могуће исходе.

		вртешка 2				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
вртешка 1	**1**	2	3	4	5	6
	2		4	5	6	7
	3			6	7	8
	4				8	9
	5					10

б) Одреди вероватноћу да Иван добије:

i збир 2 **ii** збир 11

в) Одреди вероватноћу да је Иван добио збир већи од 6.

Решење запиши као нескративи разломак.

Речник

А

азимут Угао измерен са севера у правцу кретања казаљки на сату, који се користи за одређивање смера.

анкета (упитник) Група записаних питања.

Б

брзина Пут пређен за јединицу времена.

бројилац Име вредности изнад разломачке црте у разломку.

бочна пројекција Бочни поглед тела.

В

вишестепени ступчасти дијаграм Ступчасти дијаграм који приказује више од једне групе података.

Г

геометријско место тачака Скуп тачака које испуњавају одређено правило.

грам Основна јединица мере за масу.

губитак Када се производ продаје по нижој цени од његових почетних трошкова, тада се разлика назива губитак.

график пређеног пута График који приказује пут пређен у одређеном временском периоду.

Д

дводимензионалан Облик који има само две димензије – дужину и ширину (висину).

дупли ступчасти дијаграм Ступчасти дијаграм на коме су приказане вредности две групе података.

децимално место (д.м.) Цифра у децималном броју после децималног зареза. На пример, 1 децимално место (д.м.) значи једну цифру после децималног зареза.

дијагонала Дуж у вишеугаонику која повезује његова два несуседна темена.

дијаграм са тачкама Дијаграм којим су приказане вредности две групе података као тачке.

директна пропорција Две величине y и x су правопропорционалне, ако је $y = kx$, односно ако је њихов количник константан.

добитак Када се производ продаје по вишој цени од његових почетних трошкова, тада се разлика назива добитак. (продаја – укупни трошкови = добитак)

дужина кружнице (или круга) обим кружнице.

Е

еквивалентни разломци Разломци који имају исту вредност.

еквивалентне размере Размери који показују да су исте релативне величине еквивалентне.

еквивалентна израчунавања Израчунавања која дају исти резултат. На пример, $13 \cdot 0{,}03$ је еквивалентно израчунавању $13 \cdot 3 : 100$.

експериментална вероватноћа

$$= \frac{\text{број успешних исхода}}{\text{укупан број покушаја}}$$

експеримент Низ покушаја.

З

замена Поступак којим на месту слова из израза или формуле записујемо дате вредности.

значајне цифре Цифре броја. Прва ненулта цифра у броју је прва значајна цифра и све цифре после ње су значајне цифре.

И

изометријски папир папир са троуглим низом тачака подређеним у редове које међу собом праве угао од 120°.

израз Група чланова који не укључују знак једнакости.

именилац Име вредности испод разломачке црте у разломку.

интервју Разговор између две особе у којем једна особа поставља питања другој.

истраживање Метода сакупљања података постављањем питања или вршењем посматрања.

исходи који се узајамно искључују Исходи који не могу да се десе у исто време, већ само један од њих.

изложилац Број у степену који показује колико пута се основа множи сама са собом: на пример, у 3^5, степенов чинилац је број 5.

Ј

јединични размер Размер у облику $1 : n$ или $n : 1$.

једначина Математичка тврдња по којој су два израза са променљивом једнака.

К

кило Метрички префикс за 1000.

коефицијент правца Мера за нагиб праве.

коефицијент сличности Количник дужина страна оригинала и увећане слике.

комбинована трансформација Више од једне трансформације.

Компас Инструмент за одређивање смерова, најчешће путем изравњавања са севером.

конвексан многоугао Многоугао чији су унутрашњи углови мањи од 180°.

корелација Веза између две групе података.

Л

линеарни низ Низ у којем су разлике између било којих суседних чланова једнаке.

линеарна функција Функција у којој непозната има изложилац 1. График на линеарне функције је права.

Литар Јединица мере за запремину.

М

метар Јединица мере за дужину.

метрички систем Систем мера који се оснује на декадном бројевном систему.

мешовити број Број састављен од целог дела и разломка.

мили метрички префикс за $\frac{1}{1000}$ из основне јединице.

мрежа Поглед на 3Д-форму одозго.

многоугао 2Д-форма у равни оивичена само дужима.

Н

***n*-ти члан** Општи члан низа.

најједноставнији облик Запис разломка или израза који се не може више упростити.

негативна корелација Када се једна величина повећава, друга се смањује.

неконвексан многоугао Многоугао који има бар један унутрашњи угао већи од 180°.

неправи разломак Разломак у којем је бројилац већи од имениоца.

неједнакост Запис од два бројевна израза повезана са једним од знакова $<, >, \geq, \leq$.

неједначина је неједнакост која садржи променљиву као на пример, $x > 5$ или $x \leq -2$.

низ Група бројева или шема повезаних неким правилом.

нормалне праве Праве које се секу под правим углом.

нулта корелација Тачке на дијаграму не приказују никакав тренд.

О

оригинал Почетни облик пре почетка геометријске трансформације.

ослобађање од заграда Поступак множења свих чланова у загради чланом изван заграде.

осна симетрија Симетрија у односу на праву.

основа степена Број који се степенује.

П

пи (π) Количник дужине кружнице и њеног пречника. Приближно је једнак 3,141592654.

подударан 2Д-форме које имају једнаке странице и једнаке углове.

повећавање Геометријска трансформација којом се мења величина једне 2Д-форме према датом коефицијенту сличности. Добијена је слична 2Д-форма већа од дате.

покушаји и грешке Начин одређивања приближних решења једначина, при чему се прави процена решења, а затим и покушај да се процена побољша.

попречни пресек Фигура која се добија ако раван пресече 3Д-форму у произвољној тачки.

посматрање Процес, односно поступак којим се сабиру примарни подаци који се записују када се примете (виде), на пример број аутомобила који се крећу на одређеном месту.

план Поглед на 3Д-форму одозго.

позитивна корелација Када се једна величина повећава, тада се повећава и друга величина.

потпуни квадрат Број који се добија множењем целог броја са самим собом. Други степен броја.

полигон фреквенције Врста дијаграма фреквенције који се користи за груписање података. Тачке се цртају за средње вредности класа.

попречни пресек 2Д-форма која се добија ако се 3Д-форма пресече са равни у произвољној тачки.

популација Цела група која је предмет истраживања.

правилан многоугао Многоугао једнаких страна и једнаких углова.

правило *n*-тог члана низа Правило које повезује члан низа са његовим редним бројем у низу.

правило одређивања следећег члана низа Правило које повезује два суседна члана у низу.

предња пројекција Поглед на 3Д-форму са предње стране.

пречник Тетива која пролази кроз центар кружнице

призма 3Д-форма чији су сви попречни пресеци исте фигуре.

примарни подаци Подаци које сами сакупљамо.

пројекција Поглед на 3Д-форму. Постоји пројекција одозго и бочне пројекције.

променљива Величина која може да има различите вредности. Најчешће је обележена словом.

проста камата Камата која се исплаћује једнократно на крају периода орочавања.

процентуално смањивање Проценат за који се нека вредност умањила.

процена просека Одређује се коришћењем средњих вредности у класама у групи података. То је оцена када нису познате праве вредности.

покушај Једнократни експеримент, на пример бацање коцке за играње.

Р

растављање на чиниоце Поступак којим се у једном изразу испред заграде извлачи НЗД за све његове чланове. Обрнуто од поступка ослобађања од заграда.

размер Релативна величина за две или више вредности. Записује се као количник.

раван симетрије Раван или равна површина која се понаша као огледало и која дели тело на два подударна дела. Сваки од два дела је огледална слика другог.

релативна учесталост

$$= \frac{\text{број успешних исхода}}{\text{укупан број покушаја}}$$

С

санти Метрички префикс за $\frac{1}{100}$ мерне јединице.

секундарни подаци Подаци које је прикупљао неко други.

систем једначина Неколико једначина са две или више променљивих, за које постоје вредности које су истовремено решења свих једначина из система.

симетрија Пресликавање у ком се права (раван) понаша као огледало. 2Д-форма се пресликава у подударну 2Д-форму, тело се пресликава у подударно тело-. При томе, 2Д-форма (тело) и њена слика су огледалне слике једне другој.

скраћивање Поступак којим се бројилац и именилац деле истим бројем. Друга реч за упрошћивање.

следбени стабло лист дијаграм Дијаграм који се користи за организовање две групе података, поређаних према величини.

слика Крајња фигура после геометријске трансформације.

сличност Две фигуре су сличне ако имају једнаке углове и пропорционалне стране.

сложена мера Мера, као брзина, која се израчунава из друге две мере.

суседна страница Страница у троуглу која формира (дотиче) угао у правоуглом троуглу.

супротна страница Страница која се налази наспрам угла у правоуглом троуглу.

средња брзина Брзина израчунатa у одређеном временском периоду.

стабло-лист дијаграм Дијаграм фреквенције који организује податке према величини.

степен Запис скраћеног множења истог броја са самим собом.

степен тачности Број децималних места или значајних цифри броја.

спољашњи угао Угао који се формира у спољашности многоугла, када се продужи једна од његових страница.

Т

табела исхода Табела која приказује све могуће исходе у једном експерименту.

теме Тачка у којој се додирују две странице многоугла.

теорема Математичка тврдња чија тачност може да се докаже.

тесалација поплочавање равне површине шемом од 2Д-форми без преклапања и без празнина.

транформација Кретање или промена једне 2Д-форме у другу.

тродимензионалан Предмет који има дужину, ширину и висину.

У

Увећавање Геометријска трансформација којом се мења величина једне 2Д-форме према задатом коефицијенту сличности. Добијена је слична 2Д-форма, већа од задате.

упрошћавање разломка Скраћивање разломка

упрошћавање израза Поступак у којем се сабирају или одузимају слични чланови у изразу.

узастопни стабло лист дијаграм Дијаграм који се користи за организацију две групе података, поређаних према величини.

узорак Део популације који питамо, када не желимо да питамо целу популацију.

уписивање Конструисање 2Д-форме чија темена припадају страницама друге фигуре.

Ф

формирање тесалације Формирање шеме од 2Д-форми које покривају равну површину без преклапања и без празнина.

формирање мозаика

Формирање шеме из 2Д-форми које покривају равну површину без преклапања и без празнина.

формирање правилног мозаика Формирање мозаика од једне врсте правилног многоугла.

формула Правило које повезује две или више променљивих.

Х

хектар Јединица мере за површину, једнака са 10.000 квадратних метара.

хипотенуза Најдужа страница правоуглог троугла.